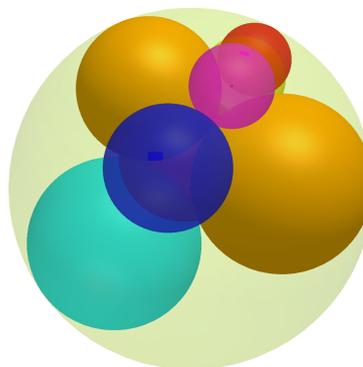


# Que de sphères, que de sphères ! Soddy's hexlet



Jacques MAROT

15 octobre 2017

## Résumé

L'étude du problème suivant provient d'exercices et d'images vues dans des articles proposés sur le web concernant un sangaku dans l'espace :

- <http://ww2.ac-poitiers.fr/math/spip.php?article657>
- [https://en.wikipedia.org/wiki/Soddy's\\_hexlet](https://en.wikipedia.org/wiki/Soddy's_hexlet)
- [http://www.wikiwand.com/en/Soddy's\\_hexlet](http://www.wikiwand.com/en/Soddy's_hexlet).

Je ne sais d'où provient sa dénomination par wikipedia : Soddy'hexlet. Je n'ai pas réussi à faire de liens précis autres que ceux de cet encyclopédie en ligne, entre les références historiques qui semblent le faire remonter à des tablettes japonaises du XIX<sup>e</sup> siècle (1<sup>e</sup> illustration : [https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/a/a4/Sangaku\\_of\\_Soddy%27s\\_hexlet\\_in\\_Samukawa\\_Shrine.jpg](https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/a/a4/Sangaku_of_Soddy%27s_hexlet_in_Samukawa_Shrine.jpg)) et le mathématicien/chimiste anglais qui aurait permis d'élucider les propriétés de ce sangaku en trois dimensions. C'est en cherchant à reproduire cette configuration de plusieurs sphères tangentes à l'aide du logiciel GEOGEBRA (2<sup>e</sup> illustration), que j'ai pu constater d'intrigantes propriétés géométriques. J'ai cherché à les vérifier par des calculs de géométrie analytique classique, la théorie des transformations géométriques appelées INVERSIONS<sup>1</sup>, permet de résoudre élégamment le problème. L'objectif de départ qui était de reproduire cette configuration géométrique avec Geogebra en a été largement simplifiée, c'est la démarche détaillée qui est expliquée ici pour aboutir à sa construction, et mettre en évidence ses propriétés.

Le problème à résoudre est le suivant, étant donné une sphère  $\mathcal{S}_0$  de rayon  $R$ , représentée ici en vert, on considère deux autres sphères marrons  $\mathcal{S}_1$  et  $\mathcal{S}_2$  de rayons  $a$  et  $b$  tangentes entre elles et toutes les deux tangentes intérieurement à la plus grande sphère verte.

- Quel est le rayon maximum  $M$  et le rayon minimum  $m$  d'une 4<sup>e</sup> sphère  $s_0$  qui serait tangente au trois précédentes ?
- Étant donné le rayon  $r_0 \in [m; M]$  de  $s_0$ , quel est le rayon  $r_1$  et le nombre de solution pour loger une 5<sup>e</sup> sphère  $s_1$  tangente aux quatre précédentes ?
- On peut poursuivre et construire ainsi un collier autour des deux sphères marrons, constitué de sphères  $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$  tangentes au trois sphères initiales  $\mathcal{S}_0, \mathcal{S}_1$  et  $\mathcal{S}_2$ , en exigeant de plus que chaque sphère  $s_{i+1}$  ajoutée dans le collier soit tangente à la précédente  $s_i$ .  
Quelques soient  $\mathcal{S}_0, \mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2$  et  $s_0$  il est assez surprenant que la construction d'un tel collier se referme parfaitement avec une dernière sphère ajoutée  $s_n$ , toujours tangente à la première sphère  $s_0$ , à la manière des cercles de Steiner ([https://fr.wikipedia.org/wiki/Chaîne\\_de\\_Steiner](https://fr.wikipedia.org/wiki/Chaîne_de_Steiner)). Mais contrairement aux chaînes de Steiner, le nombre de sphères dans le collier ne peut être quelconque, combien peut-il en avoir ?
- Quels liens y-a-t-il entre les rayons de toutes ces sphères, quel est le lieu des points de contacts obtenus à partir des 3 sphères initiales ainsi que le lieu des centres des sphères du collier ?

1. La définition et l'essentiel des propriétés des inversions pour nos besoins présents sont annexés à ce document

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Nombre de sphères possibles dans le collier</b>	<b>2</b>
1.1	Cas particulier .....	2
1.2	Cas général .....	4
<b>2</b>	<b>Construction d'un hexlet quelconque par inversion avec Geogebra</b>	<b>6</b>
2.1	Préparation dans un plan qui contient les centres des 3 premières sphères .....	6
2.2	Inversion dans l'espace de l'hexlet régulier .....	7
<b>3</b>	<b>Calcul du Rayon des 6 sphères du collier de l'hexlet</b>	<b>8</b>
3.1	Retour sur la construction de l'hexlet régulier .....	8
3.2	Inversion de l'hexlet régulier .....	9
3.3	Vérification des résultats dans GEOGEBRA .....	9
3.4	Expression des résultats en fonction des caractéristiques du triangle $OC_1C_2$ .....	10
<b>4</b>	<b>Invariants et relations entre les rayons des 6 sphères du collier.</b>	<b>11</b>
4.1	Invariance de la moyenne harmonique des rayons .....	11
4.2	Invariance de l'écart-type des courbures des sphères du collier .....	11
4.3	Invariance des moyennes harmoniques des aires et volumes des sphères du collier .....	11
<b>5</b>	<b>Construction à l'aide des contacts entre sphère englobante et collier</b>	<b>12</b>
5.1	Lieu des points de contacts .....	12
5.2	Ellipse des centres des sphères du collier .....	13
5.3	Excentricité de l'ellipse lieu des centres des sphères du collier .....	14
<b>A</b>	<b>Annexe : quelques propriétés des inversions</b>	<b>16</b>
A.1	Puissance d'un point par rapport à une sphère .....	16
A.2	Inversion d'une sphère en dimension quelconque .....	16
A.2.1	$P \notin \mathcal{S}(O, r)$ .....	17
A.2.2	$P \in \mathcal{S}(O, r)$ .....	17
A.3	Construction de l'inverse d'un cercle dans l'espace de dimension 3 .....	18
A.4	Théorème utile au calcul des rayons de l'hexlet .....	18

## 1 Nombre de sphères possibles dans le collier

### 1.1 Cas particulier

Avant de résoudre le problème général, on peut remarquer que le problème se résout très simplement dans un cas particulier, lorsque les deux sphères moyennes, tangentes intérieurement à la grande sphère de rayon  $R$ , ont chacune un rayon égal à  $\frac{R}{2}$ .

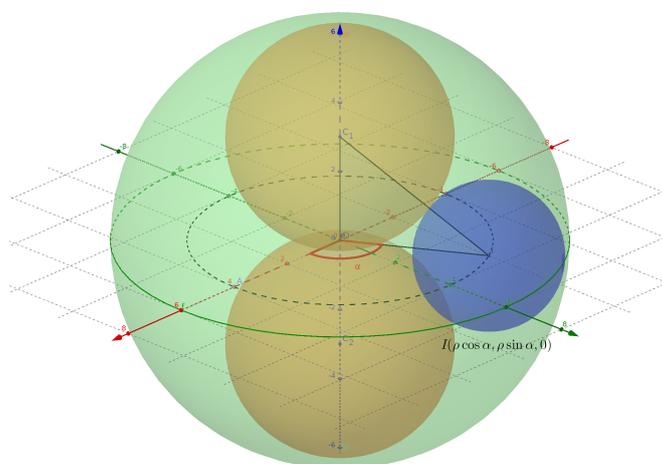


FIGURE 1 – Cas particulier où  $\mathcal{S}_1$  et  $\mathcal{S}_2$  sont tangentes en O

Pour faciliter les calculs, sans restriction de généralité, nous allons supposer que  $R = 6$  comme sur la figure 1. Soit O le centre de la sphère verte  $\mathcal{S}$ , si les deux sphères marrons  $\mathcal{S}_1$  et  $\mathcal{S}_2$  tangentes entre elles en

un point T ont le même rayon  $r = \frac{R}{2} = 3$ , leurs centres  $C_1$  et  $C_2$  sont tels que  $C_1C_2 = 6$ . Sur chacune de ces sphères, les points  $T_1$  et  $T_2$  diamétralement opposés à T sont donc tels que  $T_1T_2 = 12$ , le segment  $[T_1T_2]$  est alors un diamètre de la plus grande sphère, le point de contact de  $\mathcal{S}_1$  et  $\mathcal{S}_2$  est donc tel que  $T = O$ . Pour ces raisons, nous choisissons un repère orthonormé  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  comme illustré sur la figure 1 tel que  $(O; \vec{i}, \vec{j})$  soit un repère du plan médiateur de  $[C_1C_2]$ .

Toute autre sphère tangente aux sphères  $\mathcal{S}_1$  et  $\mathcal{S}_2$  de rayon 3, aura son centre I équidistant de  $C_1$  et  $C_2$ . On doit donc placer I dans le plan médiateur de  $[C_1C_2]$  que nous avons choisi pour être le plan  $(xOy)$ . Dans ce plan, soit  $(\rho, \alpha)$  les coordonnées polaires de I dans un repère d'origine O et axe  $(O, \vec{i})$ . Si on veut de plus que cette sphère soit tangente à la plus grande sphère  $\mathcal{S}_0$ , leur point de contact aura nécessairement des coordonnées de la forme :  $(6 \cos \alpha, 6 \sin \alpha, 0)$ . Le rayon d'une telle sphère, comme celles en bleu sur la figure 1 est donc  $IT = 6 - \rho$ . Pour que les sphères bleues et marrons soient tangentes, la somme de leurs rayons doit de plus vérifier :  $IC_1 = IC_2 = 3 + (6 - \rho) = 9 - \rho$ . Or dans les triangles rectangles  $IOC_1$  ou  $IOC_2$  on a :  $IC_1^2 = IC_2^2 = 3^2 + \rho^2$ , d'où  $(9 - \rho)^2 = 9 + \rho^2 \Leftrightarrow 81 - 18\rho = 9$ . Toute sphère du collier que nous voulons construire doit donc être centrée sur un cercle de rayon  $\rho = 4$ , et avoir un rayon égal à 2. On ne peut loger ainsi que 6 sphères centrées sur les sommets d'un hexagone régulier  $I_1I_2I_3I_4I_5I_6$  dans le plan  $(xOy)$ , inscrit dans un cercle de centre O et rayon 4. On peut remarquer que les conditions miraculeuses qui se produisent concernant cette configuration illustrée par la figure 2, proviennent des triangles Pythagoriciens ou égyptiens  $I_iC_jO$  de côtés  $(3, 4, 5)$ .

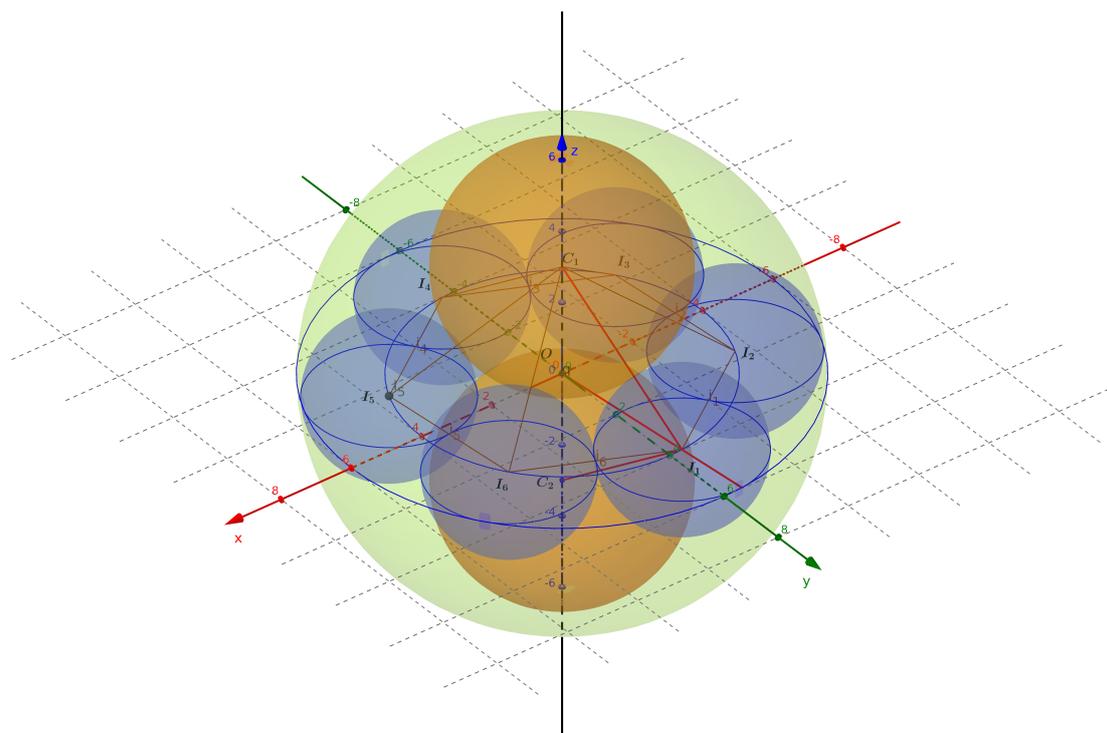


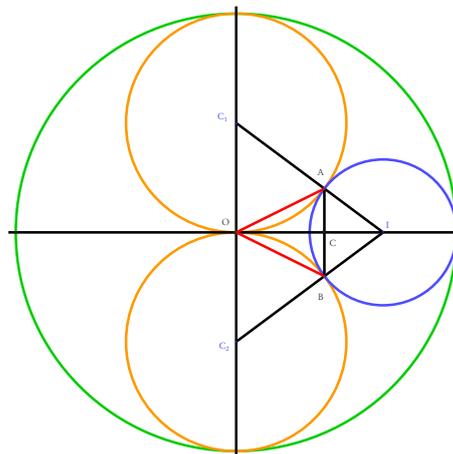
FIGURE 2 – Cas particulier avec un collier de 6 sphères bleues isométriques

Par la suite nous aurons besoin du rayon de la sphère de centre O, passant par les points de contact entre les sphères bleues et brunes, il s'agit de la longueur des segments en rouge sur la figure de droite, on a :

$$\frac{CA}{OC_1} = \frac{IC}{IO} = \frac{IA}{IC_1} = \frac{2}{5} \Rightarrow CA = \frac{1}{5}R \text{ et } OC = \frac{2}{5}R$$

On en déduit :

$$OA^2 = OC^2 + CA^2 = \frac{1}{5}R^2 \Rightarrow OA = \frac{R}{\sqrt{5}}$$



## 1.2 Cas général

Étant donné le rayon  $R$  de la plus grande sphère, lorsque le rayon des sphères  $\mathcal{S}_1$  et  $\mathcal{S}_2$  est différent de  $\frac{R}{2}$ , le problème se complique; mais la théorie des inversions nous permet de conclure, car elle permet de nous ramener au problème précédent. Une inversion est une transformation involutive définie dans un espace euclidien  $\mathcal{E}$ , auquel il faut adjoindre un point à l'infini noté  $\infty$  pour qu'elle soit bijective. On la définit par son pôle  $P \in \mathcal{E}$  et sa puissance  $k \in \mathbb{R}^*$ ; cette involution que nous noterons  $\mathcal{I}_{(P;k)}$  échange  $P$  et  $\infty$ , et pour  $M \in \mathcal{E} \setminus \{P\}$  l'image  $\mathcal{I}_{(P;k)}(M) = M'$  est l'unique point tel que  $M' \in (PM)$  et  $\overrightarrow{PM} \cdot \overrightarrow{PM'} = k$ . On expliquera en annexe, la propriété essentielle des inversions qui va nous aider à résoudre le problème : **toute sphère ne passant pas par le pôle est transformée en une autre sphère.** Le fait que les inversions sont de manière évidente des bijections involutives, permet d'affirmer que 2 sphères tangentes ne passant pas par le pôle, sont transformées en 2 autres sphères tangentes. Deux sphères tangentes n'ont en effet qu'un seul point en commun, leurs transformées par une bijection ne peuvent donc avoir qu'un seul point commun elles aussi. La seule définition d'une inversion et cette propriété admise pour le moment, suffisent à résoudre de manière générale notre problème, en choisissant la bonne inversion qui nous ramènera au cas particulier précédent.

Soit  $(a; b) \neq \left(\frac{R}{2}; \frac{R}{2}\right)$  les rayons des sphères  $\mathcal{S}_1$  et  $\mathcal{S}_2$ , et  $T$  leur point de contact. Il s'agit de déterminer la bonne inversion qui laisse globalement invariante  $\mathcal{S}_0$  et qui échange  $O$  et  $T$ , Il faut noter que l'inverse du centre d'une sphère n'est jamais le centre de la sphère inversée, même si elle est globalement invariante, comme  $\mathcal{S}_0$ . Pour cela, nous nous placerons d'abord dans un plan contenant le centre  $O$  de la plus grande sphère et les centres  $C_1$  et  $C_2$  des deux premières sphères à l'intérieur, si ces trois points sont alignés, n'importe quel plan contenant la droite  $(C_1C_2)$ , permet toujours d'effectuer notre raisonnement avec  $\alpha = 0$  ou  $\alpha = \pi$ , sur la figure plane 4. Celle-ci n'est que la trace dans le plan  $xOy$  de la figure 3 dans l'espace.

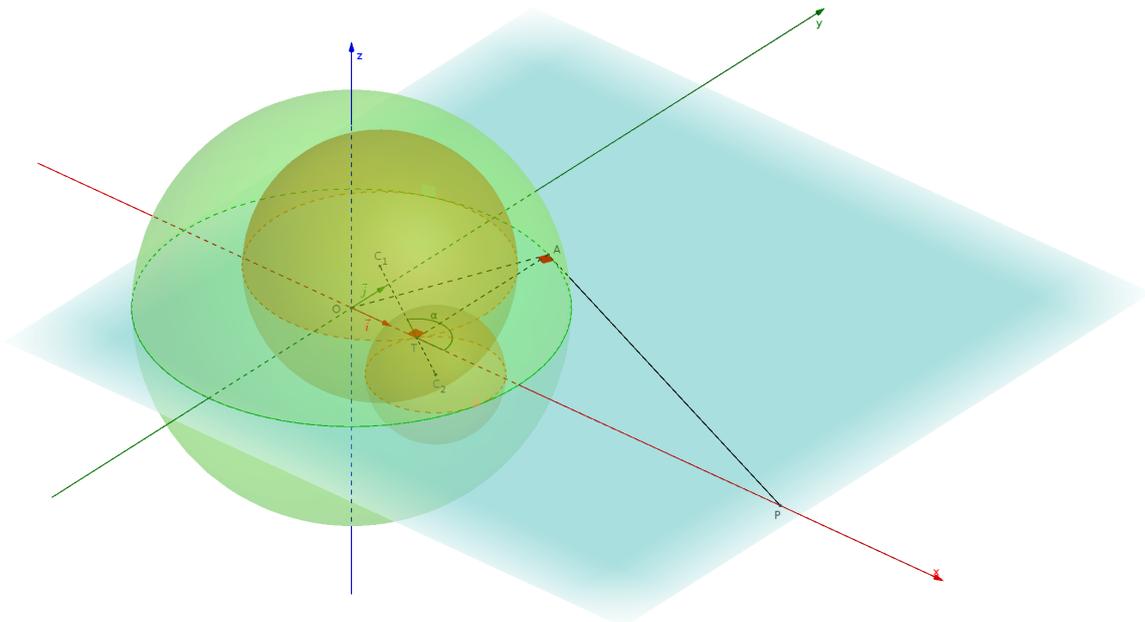


FIGURE 3 – Choix du repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  et construction du pôle de l'inversion dans le plan  $(OC_1C_2)$ .

Puisque  $T \neq O$ , nous pouvons construire dans ce plan une perpendiculaire à  $(TO)$  passant par  $T$ , désignons par  $A$  l'un des deux points d'intersection de cette droite avec  $\mathcal{S}_0$ . Dans le plan  $(ATO)$ , la droite tangente en  $A$  à  $\mathcal{S}_0$  coupe alors  $(TO)$  en un point  $P$ , Il est tout à fait possible d'effectuer cette construction avec des points  $O$ ,  $C_1$  et  $C_2$  alignés. Seul  $T \neq O$  est nécessaire pour être assuré de l'existence du point  $P$ , qui nous servira de pôle pour définir notre inversion. Ce pôle est obtenu comme 3<sup>e</sup> sommet du triangle  $OAP$  semblable au triangle rectangle  $ATO$ , cette similitude nous fournit l'égalité :  $PA^2 = \overrightarrow{PT} \times \overrightarrow{PO}$

Cette relation classique dans un triangle rectangle, nous permet de choisir à bon escient la puissance de notre inversion. La notion de puissance d'un point par rapport à une sphère expliquée en A.1, permettra de voir que pour toute paire de points  $\{M, M'\}$  sur la sphère alignés avec  $P$ , on a :  $\overrightarrow{PM} \cdot \overrightarrow{PM'} = PA^2$ . il suffit par conséquent, que la puissance de l'inversion recherchée soit  $h = PA^2$ , pour qu'elle laisse globalement invariante  $\mathcal{S}_0$ . De plus les points  $O$  et  $T$  seront bien échangés par cette inversion, puisque tout a été fait pour avoir  $\overrightarrow{PT} \cdot \overrightarrow{PO} = h$ . Sur la figure plane 4, les cercles de même couleur sont inverses l'un de l'autre, tout point

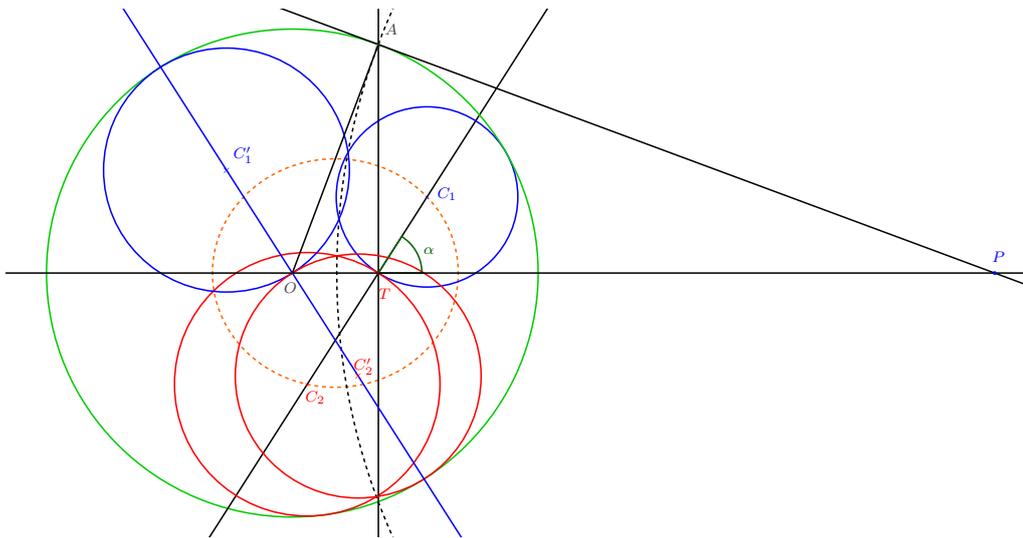


FIGURE 4 – Trace dans un plan contenant O,  $C_1$  et  $C_2$  de l'inversion des 3 premières sphères.

M du cercle de centre P et rayon PA est invariant car on a :  $PM^2 = h$ , cela fournit un moyen de construire les cercles inversés qui doivent passer par O et 2 invariants sur l'arc de cercle en pointillé noir. Attention, les centres des cercles inversés que nous nommerons  $C'_1$  et  $C'_2$  ne sont pas les inverses de  $C_1$  et  $C_2$ , mais il est important pour les calculs qui suivront, de remarquer que les droites  $(C_1C_2)$  et  $(C'_1C'_2)$  sont symétriques par rapport à la médiatrice de [TO], nous expliquerons en A.4 cette propriété des inversions. Dans l'espace, les inverses de  $\mathcal{S}_0$ ,  $\mathcal{S}_1$  et  $\mathcal{S}_2$  sont trois sphères, elles aussi tangentes, et nous obtenons en particulier deux sphères inversées avec un point de contact en O. Nous sommes donc ramener à la configuration particulière que nous avons étudiée au départ. Le collier de sphères que nous cherchons à construire, est également transformé en un collier de sphères tangentes, lui aussi possédera donc obligatoirement 6 sphères et se refermera parfaitement, avec une sixième sphère miraculeusement tangente à la première.

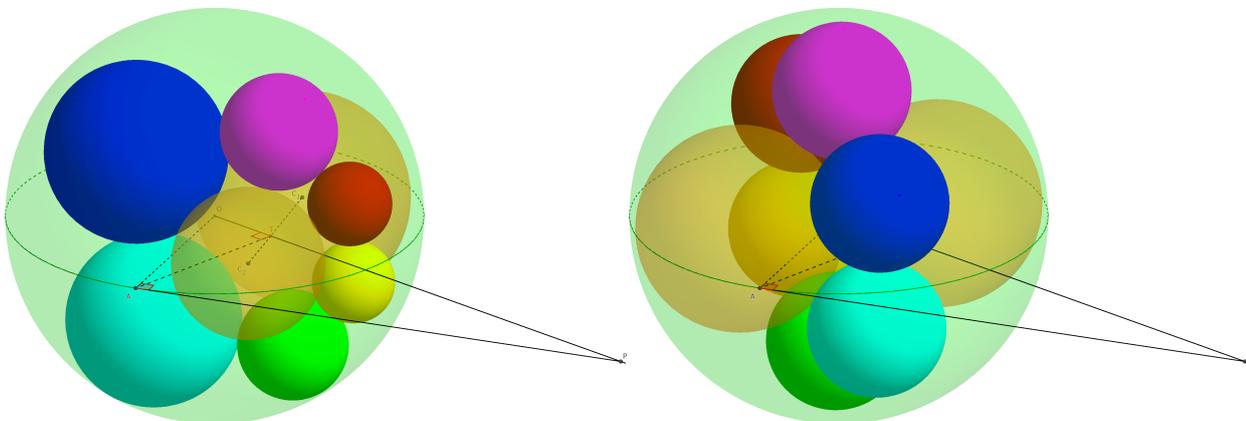


FIGURE 5 – configurations inverses l'une de l'autre par l'inversion  $\mathcal{I}_{(P;PA^2)}$ .

C'est ce que nous avons illustré en figure 5, le fichier élaboré avec le logiciel Geogebra qui a servi à ces constructions, est téléchargeable à l'adresse : [http://mathmj.fr/geogebra/inversion\\_hexlet.ggb](http://mathmj.fr/geogebra/inversion_hexlet.ggb) Nous en expliquerons son protocole dans le paragraphe suivant, cela nous permettra d'éclairer la méthode utilisée ensuite, pour calculer les rayons des sphères du collier en configuration la plus générale. Nous appellerons hexlet cette configuration de 9 sphères, avec une disposition en collier de six d'entre elles, qui enlace deux sphères disposées initialement à l'intérieur de la plus grande. Parmi ces neuf sphères, chacune des six sphères du collier est tangente à cinq autres, les trois qui ne sont pas dans le collier sont tangentes à toutes les autres.

Nous utiliserons la terminologie hexlet régulier, pour désigner un hexlet comme celui de droite en figure 5, c'est la configuration particulière étudiée en introduction, avec dans le collier, 6 sphères de même rayon égal au tiers de celui la sphère englobante.

## 2 Construction d'un hexlet quelconque par inversion avec Geogebra

### 2.1 Préparation dans un plan qui contient les centres des 3 premières sphères

Pour faciliter cette première construction avec GEOGEBRA, nous supposons que le plan de repère  $(O; \vec{i}, \vec{j})$  contient les centres des trois sphères initiales. Nous initialiserons donc la construction par sa trace dans le plan  $xOy$  de la fenêtre 2D du logiciel. Il s'agit d'un point vu différent du cas particulier d'introduction, dans lequel  $xOy$  était supposé perpendiculaire à  $(C_1C_2)$ , cette fois ci il contiendra  $C_1C_2$ . Puisque dans le cas d'un hexlet irrégulier  $T \neq O$ , on pourra poser  $\vec{i} = \frac{1}{OT} \overrightarrow{OT}$  et choisir  $\vec{j}$  de manière que que  $C_1$  ait une ordonnée positive ou nulle. Étant donné le rayon  $R$  de la sphère englobante  $\mathcal{S}_0$ , la disposition des 3 sphères initiales

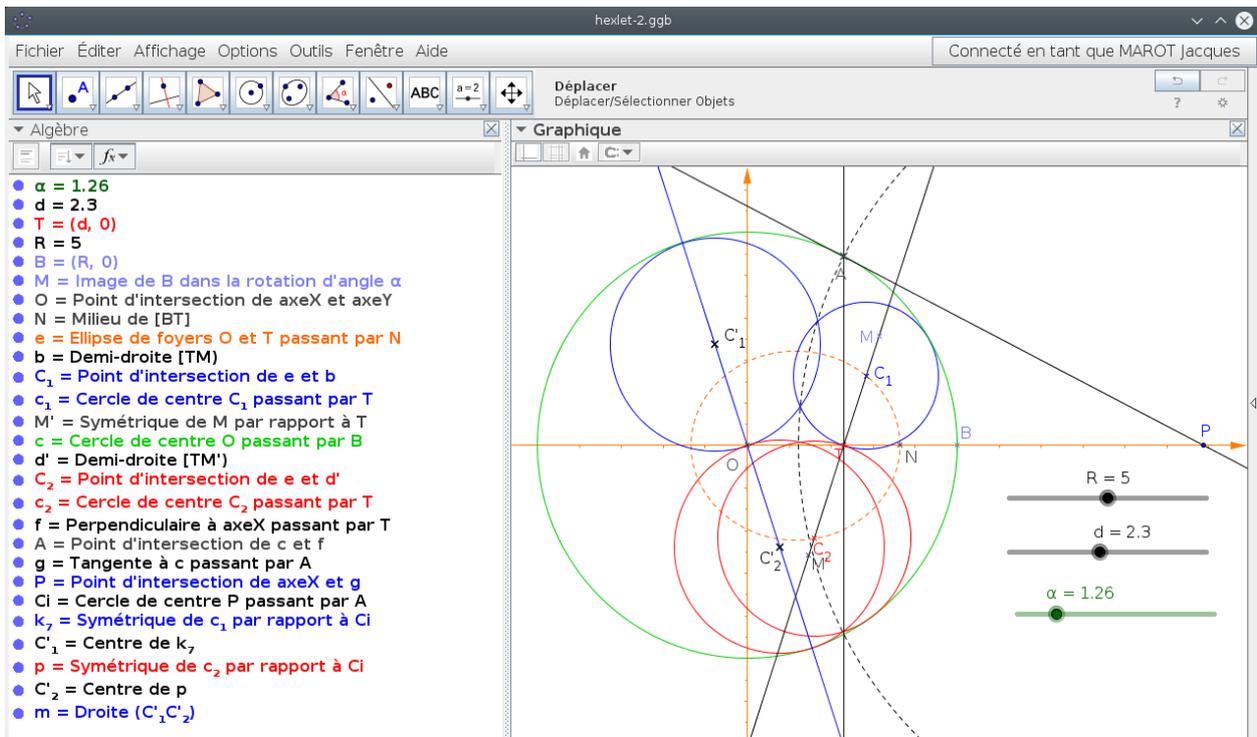


FIGURE 6 – Initialisation de la construction dans un plan

de cet hexlet sera entièrement caractérisée par le point  $T$  de coordonnées  $(d, 0, 0)$  avec  $d \in ]0; R]$ , et l'angle  $(\vec{i}, \overrightarrow{C_2C_1})$ , que nous calculerons plus tard à l'aide des rayons  $a$  et  $b$  des deux premières sphères intérieures. La trace de ces 2 sphères  $\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2$  en contact au point  $T$ , et tangentes intérieurement à  $\mathcal{S}_0$ , sont des cercles passant par  $T$  et tangents dans le plan  $xOy$ , au cercle  $\mathcal{C}$  de rayon  $R$ , centré en  $O$ . Dans ce plan, le lieu des centres  $C$  de telles sphères, est une ellipse de foyer  $O$  et  $T$ , car on doit toujours respecter l'égalité  $CO + CT = R$ . Cette ellipse  $\mathcal{E}$  de cercle directeur  $\mathcal{C}$ , peut être construite sous GEOGEBRA à l'aide de ses foyers, et d'un point particulier comme  $N$ , milieu de  $T$  et  $B$  de coordonnées  $(0, R)$ . On peut ainsi obtenir toutes les configurations d'hexlets possibles, à une isométrie près, en plaçant d'abord sur  $\mathcal{E}$  le centre  $C_1$ , caractérisé par la mesure  $\alpha \in [0; \pi[$  de l'angle  $(\vec{i}, \overrightarrow{C_2C_1})$ , nous pouvons alors tracer le cercle trace de  $\mathcal{S}_1$  dans  $xOy$ , passant par  $T$  et tangent à  $\mathcal{C}$ . Le centre du cercle trace de  $\mathcal{S}_2$  qui est aussi sur l'ellipse, doit être de plus aligné avec  $T$  et  $C$ , c'est donc l'unique point  $C_2$  d'intersection de  $\mathcal{E}$  avec la demi-droite opposée à  $[TC_1]$ . La saisie d'écran en figure 6, montre dans la fenêtre «algèbre» de GEOGEBRA, la définition des premiers éléments que nous venons de construire.

On élabore ensuite dans  $xOy$ , les éléments de l'inversion évoquée pour résoudre le problème, il s'agit d'un point  $A$  commun à la perpendiculaire à  $(OT)$  en  $T$  et au cercle de centre  $O$ . Puisque  $T$  est supposé différent de  $O$ , la tangente au cercle en ce point d'intersection coupe toujours la droite  $(OT)$  en un point  $P$ , c'est ce point qui nous servira de pôle de l'inversion de puissance  $PA^2$ . Pour clarifier la construction, nous avons représenté les cercles, traces dans  $xOy$ , de ces 3 premières sphères et de leurs inverses. Dans la saisie d'écran de la figure 6 apparaît la définition de ces derniers éléments, et plus particulièrement de  $(C'_1C'_2)$  : axe du cercle dans lequel est inscrit l'hexagone régulier, dont les sommets sont les centres des sphères de l'hexlet à inverser (voir figure 9). Pour des besoins ultérieurs, nous démontrerons en 3.1, que cet axe  $(C'_1C'_2)$  est symétrique de  $(C_1C_2)$  par rapport à la médiatrice de  $[TO]$ .

## 2.2 Inversion dans l'espace de l'hexlet régulier

L'inversion dans l'espace n'est pas implémentée dans Geogebra, et sa terminologie pour l'inversion dans le plan peut prêter à confusion, en appelant symétrique des objets qui devraient être appelés inverses. On va devoir par conséquent, construire l'outil «inversion-sphère» dans GEOGEBRA 3D, Nous pourrons alors inverser un hexlet régulier, constitué de 6 sphères de rayon  $\frac{R}{3}$ , centrées sur les sommets d'un hexagone inscrit dans un cercle de centre O, rayon  $\frac{2R}{3}$ , et axe  $a = (C_1 C_2)$ . Il n'y a pas unicité de l'hexlet régulier, c'est pour construire tous les hexlets réguliers possibles, que nous avons créé le paramètre  $\beta \in [0; 2\pi[$  qui permet de définir l'hexagone  $I_1 I_2 I_3 I_4 I_5 I_6$ , à une rotation près d'angle  $\beta$  autour de l'axe  $a$ . En faisant varier les paramètres  $R, d, \alpha$  et  $\beta$ , nous pourrons donc obtenir à une isométrie près, toutes les configurations possibles d'hexlet irrégulier.

Pour construire notre outil, il nous suffira d'utiliser les propriétés démontrées en annexe A.2 : **L'inversion  $\mathcal{S}_{P,h}$  transforme la sphère de centre O et rayon r, en la sphère homothétique par rapport au centre P avec le rapport  $\frac{h}{PO^2 - r^2}$ .** La figure 7 explique en détails comment créer l'outil «inversion-sphère» avec Geogebra.

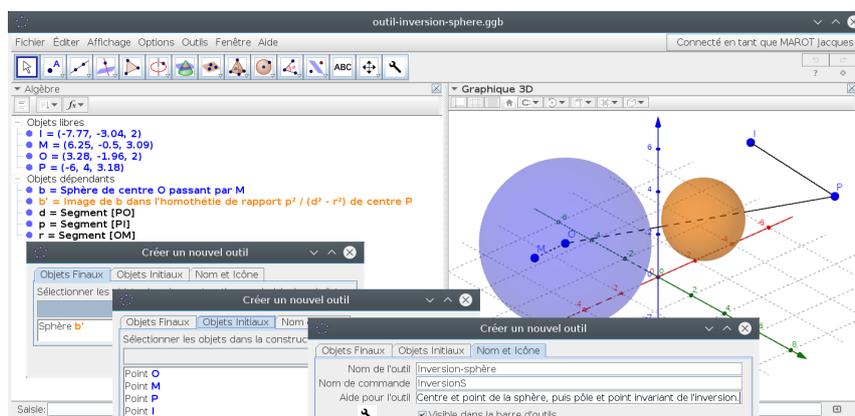


FIGURE 7 – Création de l'outil inversion sphère.

- On a d'abord élaborer un fichier Geogebra élémentaire, avec 4 points libres quelconques O, M, P et I,
- on a pu ainsi définir l'inverse de la sphère de centre O passant par M, par rapport au pôle P avec une puissance  $PI^2$ , par son homothétique par rapport à P avec le rapport  $\frac{PI^2}{PO^2 - OM^2}$ .
- Il faut enregistrer cet outil, il prend la forme d'un fichier d'extension «ggb». qu'il suffit d'ouvrir dans n'importe quel autre fichier Geogebra, d'extension «ggb», pour être ajouter au menu habituel du logiciel. Son icône apparaît à droite de la barre de menu de l'écran reproduit en figure 8, dans lequel il a été utilisé pour construire l'hexlet irrégulier de la fenêtre «Graphique3D», défini dans la fenêtre «Algèbre». Les dernières

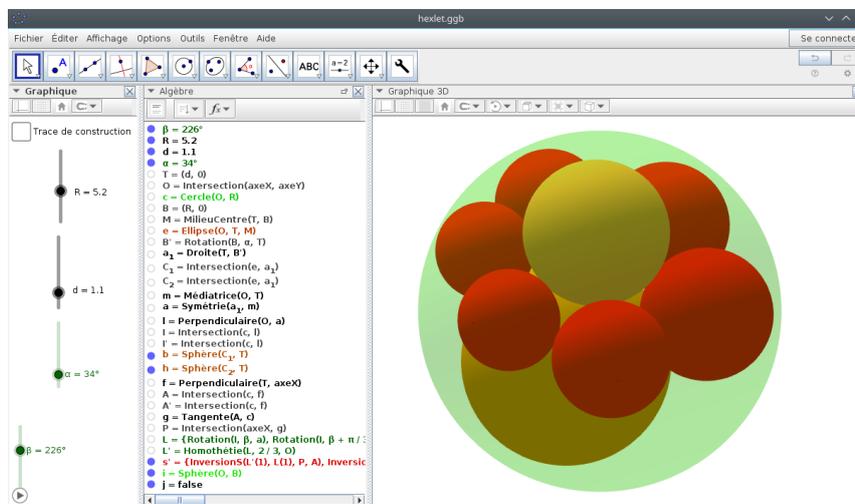


FIGURE 8 – Construction d'un hexlet quelconque par inversion d'un hexlet régulier.

Téléchargeable à l'URL : <http://mathmj.fr/geogebra/hexlet.ggb>

lignes de la fenêtre «Algèbre», qui définissent les centres des 6 sphères de rayon  $\frac{R}{3}$  d'un l'hexlet régulier, suivie de celle de l'hexlet inverse défini à l'aide de notre nouvel outil, sont détaillées ci-dessous :

- $L = \{ \text{Rotation}[I, \mathbb{R}, a], \text{Rotation}[I, \mathbb{R} + \pi/3, a], \text{Rotation}[I, \mathbb{R} + 2\pi/3, a], \text{Rotation}[I', \mathbb{R}, a], \text{Rotation}[I', \mathbb{R} + \pi/3, a], \text{Rotation}[I', \mathbb{R} + 2\pi/3, a] \}$
- $L' = \text{Homothétie}[L, 2/3, 0]$
- $s' = \{ \text{InversionS}[L'(1), L(1), P, A], \text{InversionS}[L'(2), L(2), P, A], \text{InversionS}[L'(3), L(3), P, A], \text{InversionS}[L'(4), L(4), P, A], \text{InversionS}[L'(5), L(5), P, A], \text{InversionS}[L'(6), L(6), P, A] \}$

### 3 Calcul du Rayon des 6 sphères du collier de l'hexlet

#### 3.1 Retour sur la construction de l'hexlet régulier

On obtient un hexlet régulier, si et seulement si  $T = O$ , cet hexlet régulier est ensuite inversé, pour obtenir l'hexlet irrégulier avec  $T \neq O$ , caractérisé à une isométrie près par les 3 paramètres suivants :

- Le rayon  $R$  de la plus grande sphère,
- la distance  $d \in ]0; R[$  entre le centre de la 1<sup>e</sup> sphère et le point de contact  $T$  des 2 sphères à l'intérieur,
- l'angle  $\alpha = (\overrightarrow{OT}, \overrightarrow{C_2C_1})$ , où  $C_1$  et  $C_2$  sont les centres, des sphères  $\mathcal{S}_1$  et  $\mathcal{S}_2$  à l'intérieur de la sphère  $\mathcal{S}_0$ .

On peut donc fixer le repère orthonormé direct  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  illustré en figure 9, tel que  $(O; \vec{i}, \vec{j})$  soit un repère d'un plan  $\mathcal{P}$  contenant  $O, C_1$  et  $C_2$ , avec  $\vec{i} = \frac{1}{OT} \overrightarrow{OT}$  et  $\alpha \in [0; \pi]$ .

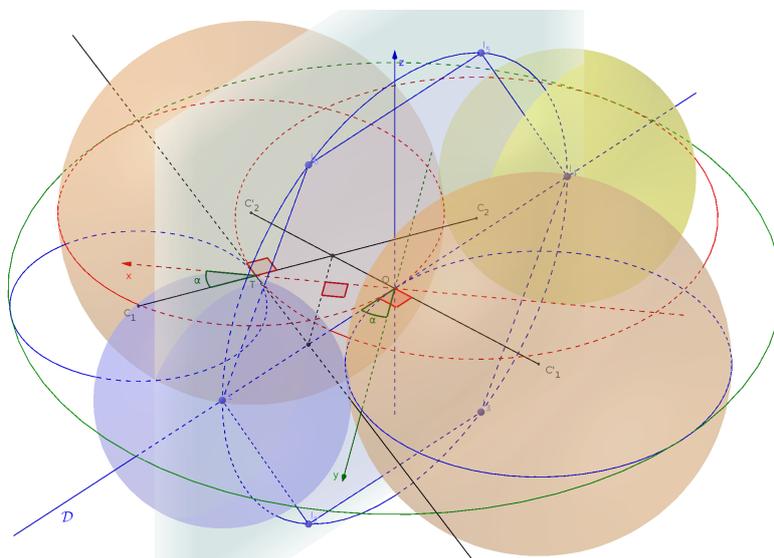


FIGURE 9 – Construction de l'hexagone régulier d'axe  $(C_1C_2)$  et côté  $\frac{2R}{3}$

En étudiant le cas particulier de l'hexlet régulier en introduction, nous avons vu que le cercle dans lequel est inscrit l'hexagone régulier dont les sommets sont les centres des sphères du collier, est situé dans le plan tangent en  $O$  aux sphères  $\mathcal{S}'_1$  et  $\mathcal{S}'_2$  de rayon  $\frac{R}{2}$ , obtenues en inversant  $\mathcal{S}_1$  et  $\mathcal{S}_2$ . La direction du plan qui contient notre hexagone admet donc pour base  $(\vec{w}, \vec{k})$ , où  $\vec{w}$  est un vecteur directeur de la droite  $\mathcal{D}$  dans le plan  $xOy$  tangente en  $O$  à  $\mathcal{S}'_1$  et  $\mathcal{S}'_2$ . Oublions un instant le vecteur  $\vec{k}$ , et raisonnons exclusivement dans le plan  $(xOy)$ ;  $\mathcal{D}$  est tangente en  $O$  aux cercles traces des deux sphères  $\mathcal{S}'_1$  et  $\mathcal{S}'_2$ , qui d'après le théorème en annexe A.4, est la symétrique par rapport à la médiatrice de  $[OT]$ , de la tangente en  $T$  aux cercles traces de  $\mathcal{S}_1$  et  $\mathcal{S}_2$ . Cette tangente perpendiculaire à la droite des centres  $(C_1C_2)$  admet  $\vec{v} = -\sin \alpha \vec{i} + \cos \alpha \vec{j}$  pour vecteur directeur, orthogonal à  $\vec{u} = \cos \alpha \vec{i} + \sin \alpha \vec{j}$  qui dirige  $(C_1C_2)$ . Par symétrie par rapport à la médiatrice dirigée par  $\vec{j}$ , on peut choisir  $\vec{w} = \sin \alpha \vec{i} + \cos \alpha \vec{j}$  comme vecteur directeur de la droite  $\mathcal{D}$ . On en déduit une représentation paramétrique du cercle  $\mathcal{C}$  de centre  $O$  et rayon  $\frac{2R}{3}$ , qui contient tous les points  $I(t)$  tels que

$$\overrightarrow{OI}(t) = \cos t \vec{w} + \sin t \vec{k} : \begin{cases} x_1(t) = \frac{2R}{3} \sin \alpha \cos t \\ y_1(t) = \frac{2R}{3} \cos \alpha \cos t \\ z_1(t) = \frac{2R}{3} \sin t \end{cases} \quad \text{avec } t \in [-\pi; \pi[$$

### 3.2 Inversion de l'hexlet régulier

Sur la figure 9, la sphère en jaune la plus éloignée de P et dont le centre est obtenu avec le paramètre  $t = \pi$ , puis la sphère en bleu la plus proche de P obtenue pour  $t = 0$  sont celles qui vont se transformer par inversion, en sphères de rayon minimum et maximum que nous allons calculer. Nous verrons en annexe, qu'une sphère de rayon  $r$  et centre I est transformée par inversion de pôle P et puissance  $h$ , en une sphère homothétique par rapport au centre P avec un rapport égal  $\frac{h}{PI^2 - r^2}$ . Les sphères du collier d'un l'hexlet régulier ont toutes un rayon égal à  $\frac{R}{3}$ , celles de l'hexlet obtenu par inversion de puissance  $PA^2$ , dépendront seulement des coordonnées de leurs centres :  $(x_1(t); y_1(t); z_1(t))$ . Nous obtiendrons les 6 sphères de l'hexlet inversé, à l'aide de 6 homothéties, toutes de même centre P, mais de rapport variable  $h(t) = \frac{PA^2}{PI(t)^2 - \frac{R^2}{9}}$ . Il nous faut donc étudier les variations de la distance  $PI(t)$ , lorsque  $t$  parcourt l'intervalle  $[-\pi; \pi[$ . Le triangle rectangle OPA permet d'exprimer les coordonnées de P qui sont  $\left(\frac{R^2}{d}; 0; 0\right)$ , on a donc :

$$PI(t)^2 = \left(\frac{R^2}{d} - \frac{2R}{3} \sin \alpha \cos t\right)^2 + \frac{4R^2}{9} \cos^2 \alpha \cos^2 t + \frac{4R^2}{9} \sin^2 t = \frac{R^4}{d^2} + \frac{4R^2}{9} - \frac{4R^3}{3d} \sin \alpha \cos t$$

Étant donné que  $PA^2 = OP^2 - R^2 = \frac{R^4}{d^2} - R^2 = \frac{R^2}{d^2}(R^2 - d^2)$ , on en déduit le rapport de l'homothétie :

$$h(t) = \frac{R^2(R^2 - d^2)}{d^2 \left(\frac{R^4}{d^2} + \frac{4R^2}{9} - \frac{4R^3}{3d} \sin \alpha \cos t - \frac{R^2}{9}\right)} = \frac{3(R^2 - d^2)}{3R^2 + d^2 - 4dR \sin \alpha \cos t}$$

En inversant une sphère de rayon  $\frac{R}{3}$  et centre  $I(t)$  on obtient donc une sphère de rayon :

$$r(t) = h(t) \frac{R}{3} = \frac{R(R^2 - d^2)}{3R^2 + d^2 - 4dR \sin \alpha \cos t}$$

### 3.3 Vérification des résultats dans GEOGEBRA

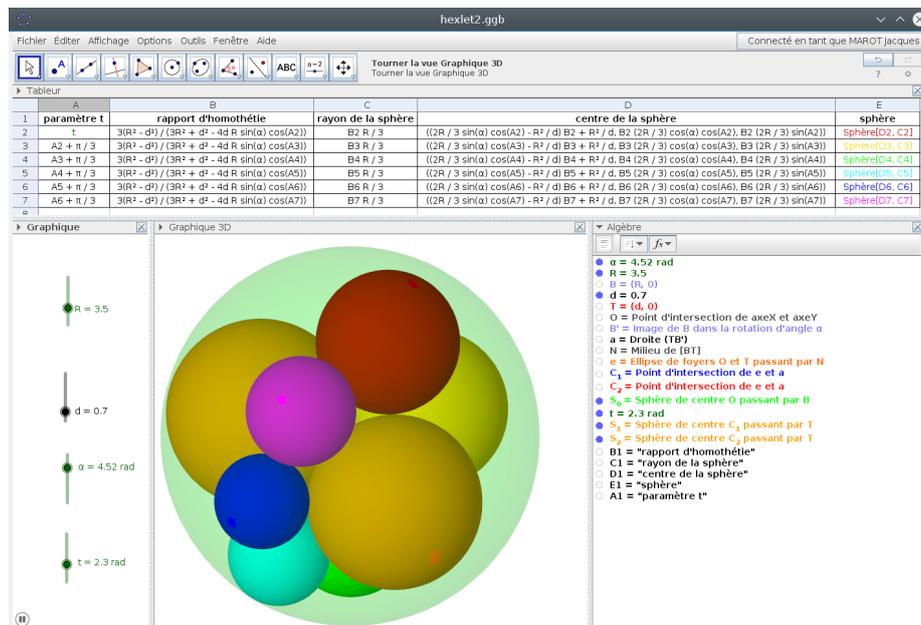


FIGURE 10 – Calcul des rayons et centres des 6 sphères de l'hexlet dans le tableur

On peut vérifier tous ces calculs, en construisant l'hexlet avec le fichier GEOGEBRA minimaliste, sans aucune construction géométrique particulière faisant intervenir inversion ou homothétie, ce fichier illustré en figure 10 est téléchargeable à L'URL : <http://mathmj.fr/geogebra/hexlet2.ggb>. Nous y définissons simplement les six sphères, après avoir calculé dans le tableur intégré à GEOGEBRA, leurs rayons et les coordonnées de

leurs centres. On utilise un paramètre  $t$  prenant les 6 valeurs d'une suite arithmétique de raison  $\frac{\pi}{3}$ , en A3, on additionne  $\frac{\pi}{3}$  à  $t$  en cellule A2, pour obtenir les valeurs suivantes du paramètre  $t$ , il suffit de recopier A3 vers le bas jusqu'en A7. On définit ensuite une première sphère avec le paramètre  $t$  sur la ligne 2, les cinq sphères suivantes du collier s'obtiennent, en recopiant vers le bas les cellules B2 :E2 jusqu'à la ligne 7. On peut construire ainsi tous les hexlets possibles à isométrie près, en faisant varier le paramètre  $t$  de la cellule A2 à l'aide d'un curseur.

### 3.4 Expression des résultats en fonction des caractéristiques du triangle $OC_1C_2$

En posant  $\frac{1}{\mu} = \frac{3R^2 + d^2}{R(R^2 - d^2)}$  et  $\frac{1}{\nu} = 2 \frac{d \sin \alpha}{R^2 - d^2}$ , on obtient cette expression de :  $r(t) = \left( \frac{1}{\mu} - \frac{2}{\nu} \cos(t) \right)^{-1}$ , les paramètres  $\mu$  et  $\nu$  peuvent être exprimés en fonction des seuls rayons des 3 sphères initiales. Sur la figure 4, on applique la formule d'Al Kashi aux triangles  $OTC_1$  et  $OTC_2$ , en désignant par  $a$  et  $b$  les rayons des 2 premières sphères à l'intérieur de l'hexlet, on obtient un système à 2 inconnues  $x = R^2 - d^2$  et  $y = d \cos \alpha$  :

$$OC_1^2 = (R - a)^2 = d^2 + a^2 - 2ad \cos \alpha \quad \text{et} \quad OC_2^2 = (R - b)^2 = d^2 + b^2 + 2bd \cos \alpha$$

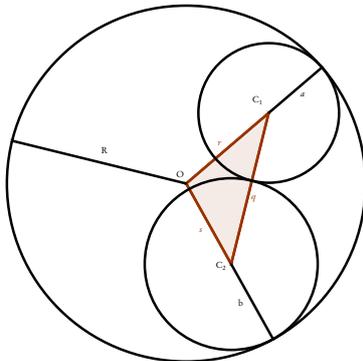
$$\text{On en déduit : } \begin{cases} x - 2by = 2bR \\ x + 2ay = 2aR \end{cases} \quad \text{ce qui implique} \quad \begin{cases} x = R^2 - d^2 = \frac{4abR}{a+b} \\ y = d \cos \alpha = \frac{(a-b)R}{a+b} \end{cases}$$

$$\text{On obtient ainsi : } \begin{cases} 3R^2 + d^2 = \frac{4a^2R}{a+b} \\ d^2 \sin^2 \alpha = R^2 - \frac{4abR}{a+b} - \frac{R^2(a-b)^2}{(a+b)^2} \end{cases}$$

Cela permet d'exprimer  $r(t)$  en fonction des rayons des 3 sphères initiales, car :

$$\begin{cases} \frac{1}{\mu} = \frac{\left( \frac{4aR^2 + 4bR^2 - 4abR}{a+b} \right)}{4 \frac{(a+b)^2 R^2 - 4abR(a+b) - R^2(a-b)^2}{(a+b)^2}} : \frac{4abR^2}{a+b} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} - \frac{1}{R} \\ \frac{1}{\nu^2} = \frac{(a+b)^2 R^2 - 4abR(a+b) - R^2(a-b)^2}{(a+b)^2} : \left( \frac{4abR}{a+b} \right)^2 = \frac{R-a-b}{abR} \end{cases}$$

$$\text{Donc : } r(t) = \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{b} - \frac{1}{R} - 2 \sqrt{\frac{R-a-b}{abR} \cos t} \right)^{-1}$$



Le paramètres  $\mu$  et  $\nu$  peuvent aussi s'exprimer à partir des seuls côtés du triangle  $OC_1C_2$ , en posant  $C_1C_2 = q$ ,  $OC_1 = r$ ,  $OC_2 = s$  et  $p = \frac{q+r+s}{2}$ .

$$\begin{cases} a + b = q \\ R - a = r \\ R - b = s \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} R = p \\ a = p - r \\ b = p - s \end{cases}$$

En exprimant l'aire  $\mathcal{A}$  du triangle  $OC_1C_2$  à l'aide de la formule de Héron :

$$\mathcal{A} = \sqrt{p(p-q)(p-r)(p-s)}$$

on aboutit aux expressions suivantes de  $\mu$  et  $\nu$  :

$$\mu = \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{b} - \frac{1}{R} \right)^{-1} = \frac{p(p-r)(p-s)}{p(p-s) + p(p-r) - (p-r)(p-s)} = \frac{p(p-r)(p-s)}{p^2 - rs} = \frac{\mathcal{A}^2}{(p^2 - rs)(p-q)}$$

$$\text{et } \nu = \sqrt{\frac{abR}{R-a-b}} = \sqrt{\frac{p(p-r)(p-s)(p-q)}{(p-q)^2}} = \frac{\mathcal{A}}{p-q}$$

On obtient finalement cette autre expression  $h(t) = \frac{3(p-r)(p-s)}{p^2 - rs - 2\mathcal{A} \cos t}$  et les rayons des sphères du collier

d'un hexlet :  $r(t) = \frac{p(p-r)(p-s)}{p^2 - rs - 2\mathcal{A} \cos t}$  qui varie dans l'intervalle  $[m; M]$  avec :

$$\begin{cases} m = \left( \frac{1}{\mu} + \frac{2}{\nu} \right)^{-1} = \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{b} - \frac{1}{R} + 2 \sqrt{\frac{R-a-b}{abR}} \right)^{-1} = \frac{p(p-r)(p-s)}{p^2 - rs + 2\mathcal{A}} \\ M = \left( \frac{1}{\mu} - \frac{2}{\nu} \right)^{-1} = \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{b} - \frac{1}{R} - 2 \sqrt{\frac{R-a-b}{abR}} \right)^{-1} = \frac{p(p-r)(p-s)}{p^2 - rs - 2\mathcal{A}} \end{cases}$$

## 4 Invariants et relations entre les rayons des 6 sphères du collier.

### 4.1 Invariance de la moyenne harmonique des rayons

Lorsque les centres des 3 sphères initiales d'un hexlet sont alignés, on voit que toutes les sphères du collier ont nécessairement le même rayon  $\mu = \frac{p(p-r)(p-s)}{p^2-rs}$ , car l'aire de  $OC_1C_2$  est nulle. Dans cette situation d'alignement, il y a donc unicité du collier à isométrie près. Lorsque  $O \notin [C_1C_2]$  ce n'est plus le cas, mais nous allons voir que la moyenne harmonique des rayons reste égale à cette constante  $\mu$ . Après avoir placé une première sphère de rayon  $r_0 \in [m; M]$  dans le collier, on attribue au paramètre  $t$  la valeur  $t_0 = \arccos \frac{v(r_0-\mu)}{2\mu r_0}$ , on a vu que les 5 sphères suivantes qui permettent de boucler la construction du collier, ont un rayon qui peut être calculé en affectant à  $t$  les valeurs d'une suite arithmétique de raison  $\frac{\pi}{3}$ . La formule démontrée

3.3, permet d'obtenir l'inverse des 6 rayons, en soustrayant à  $\frac{1}{\mu}$ , l'un des 6 coefficients de la matrice ligne

$$\text{suivante : } \left( \frac{2}{v} \cos \left( t_0 + \frac{k\pi}{3} \right) \right)_{k=0 \dots 5} = \left( \frac{1}{v} \cos t_0 \ ; \ \frac{\sqrt{3}}{v} \sin t_0 \right) \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & -2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

On arrive donc à la conclusion qu'étant donné un triangle  $OC_1C_2$  quelconque, il existe une unique configuration possible des 3 sphères initiales pour construire un hexlet de centre  $O$ , mais il existe toujours une infinité de colliers constructibles, autour des deux premières sphères intérieures de centre  $C_1$  et  $C_2$ .

Si on pose  $q = C_1C_2$ ,  $r = OC_1$  et  $s = OC_2$ , avec l'aide du demi-périmètre  $p = \frac{1}{2}(q+r+s)$  et de l'aire du triangle  $OC_1C_2$ , exprimée par la formule de Héron :  $\mathcal{A} = \sqrt{p(p-q)(p-r)(p-s)}$ , le tableau ci-dessous permet de calculer les rayons  $(r_i)_{i \in [1;5]}$  des sphères d'un collier, à partir d'un premier rayon  $r_0 \in [m; M]$ .

$\frac{1}{r_0} = \frac{1}{\mu} - 2\varphi$	$\left\{ \begin{array}{l} \mu = \frac{p(p-r)(p-s)}{p^2-rs} \\ v = \frac{\mathcal{A}}{p-q} \\ \varphi \in \left[ -\frac{1}{v}; \frac{1}{v} \right] \\ \delta^2 = \frac{3}{v^2} - 3\varphi^2 \end{array} \right.$	
$\frac{1}{r_1} = \frac{1}{\mu} - \varphi - \delta$		$\frac{1}{r_5} = \frac{1}{\mu} - \varphi + \delta$
$\frac{1}{r_2} = \frac{1}{\mu} + \varphi - \delta$		$\frac{1}{r_4} = \frac{1}{\mu} + \varphi + \delta$
$\frac{1}{r_3} = \frac{1}{\mu} + 2\varphi$		

L'infinité d'hexlets constructibles à partir d'un triangle  $OC_1C_2$ , vient du choix arbitraire de  $\varphi$  dans  $\left[ -\frac{1}{v}; \frac{1}{v} \right]$ , mais quelque soit ce choix, la disposition en hexagone des résultats dans ce tableau, met en évidence les relations suivantes entre les rayons :

$$\frac{1}{6} \sum_{k=0}^5 \frac{1}{r_k} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{r_i} + \frac{1}{r_{i+3}} \right) = \frac{1}{3} \left( \frac{1}{r_i} + \frac{1}{r_{i+2}} + \frac{1}{r_{i+4}} \right) = \frac{1}{\mu}$$

Elles expriment que  $\mu$  est la moyenne harmonique<sup>2</sup> des 6 rayons, c'est aussi la moyenne harmonique de 2 rayons  $r_i$  et  $r_{i+3}$  pour  $i \in \{0; 1; 2\}$ , ainsi que de 3 rayons  $r_i$ ,  $r_{i+2}$  et  $r_{i+4}$  pour  $i \in \{0; 1\}$ .

### 4.2 Invariance de l'écart-type des courbures des sphères du collier

L'expression des rayons ci-dessus laisse entrevoir d'autres constantes étonnantes, car le calcul de  $\sum_{k=0}^5 \left( \frac{1}{r_k} - \frac{1}{\mu} \right)^2$  en fonction de  $\varphi$  et  $\delta$ , fait apparaître une annulation des doubles produits  $\pm 2\varphi\delta$ .

La variance des 6 courbures de l'hexlet est donc  $\frac{1}{6} \sum_{k=0}^5 \left( \frac{1}{r_k} - \frac{1}{\mu} \right)^2 = \frac{12\varphi^2 + 4\delta^2}{6} = \frac{2}{v^2}$ .

On en déduit que l'écart-type des 6 courbures est constamment égal à  $\sigma = \frac{\sqrt{2}}{v} = \sqrt{\frac{2(p-q)}{p(p-r)(p-s)}}$ .

### 4.3 Invariance des moyennes harmoniques des aires et volumes des sphères du collier

On peut envisager d'autres constantes, à partir de l'égalité :  $\sigma^2 = \frac{1}{6} \sum_{k=0}^5 \frac{1}{r_k^2} - \frac{1}{\mu^2}$

2. La moyenne harmonique est l'inverse de la moyenne arithmétique des inverses

- **La moyenne harmonique des aires est :**  $\left(\frac{1}{6} \sum_{k=0}^5 \frac{1}{4\pi r_k^2}\right)^{-1} = 4\pi \left(\frac{1}{\mu^2} + \frac{2}{\nu^2}\right)^{-1}$

- **La moyenne harmonique des volumes aussi est constante.** En effet, les expressions opposées 2 à 2 des  $\left(\frac{1}{r_k} - \frac{1}{\mu}\right)_{k \in \llbracket 0;5 \rrbracket}$  permettent d'écrire  $\sum_{k=0}^5 \left(\frac{1}{r_k} - \frac{1}{\mu}\right)^3 = 0$ , dont on déduit :

$$\frac{1}{6} \sum_{k=0}^5 \frac{1}{r_k^3} = \frac{1}{\mu^3} - \frac{3}{6\mu^2} \sum_{k=0}^5 \frac{1}{r_k} + \frac{3}{6\mu} \sum_{k=0}^5 \frac{1}{r_k^2} = \frac{1}{\mu^3} - \frac{3}{\mu^3} + \frac{3}{\mu} \left(\frac{1}{\mu^2} + \frac{2}{\nu^2}\right) = \frac{1}{\mu^3} + \frac{6}{\mu\nu^2}$$

La moyenne harmonique des volumes est donc :  $\left(\frac{1}{6} \sum_{k=0}^5 \frac{1}{\frac{4}{3}\pi r_k^3}\right)^{-1} = \frac{4\pi}{3} \left(\frac{1}{\mu^3} + \frac{6}{\mu\nu^2}\right)^{-1}$

- On peut constater aussi que la moyenne des puissances 4 des courbures est constante, ce qui a pour conséquence l'invariabilité de la variance des inverses des aires. En développant les expressions des  $\left(\frac{1}{r_k} - \frac{1}{\mu}\right)^4$  en fonction de  $\varphi$  et  $\delta$ , et en tenant compte de  $[\pm(\varphi \pm \delta)]^4 = \varphi^4 + \delta^4 \pm 4\varphi\delta(\varphi^2 + \delta^2) + 6\varphi^2\delta^2$ ,

quand on effectue la somme  $\sum_{k=0}^5 \left(\frac{1}{r_k} - \frac{1}{\mu}\right)^4$  il y a annulation des 4 termes de la forme  $\pm 4\varphi\delta(\varphi^2 + \delta^2)$ , on obtient donc :

$$\sum_{k=0}^5 \left(\frac{1}{r_k} - \frac{1}{\mu}\right)^4 = 36\varphi^4 + 4\delta^4 + 24\varphi^2\delta^2 = (6\varphi^2 + 2\delta^2)^2 = \frac{36}{\nu^4}$$

Or :  $\sum_{k=0}^5 \frac{1}{r_k^4} = \sum_{k=0}^5 \left(\frac{1}{r_k} - \frac{1}{\mu}\right)^4 + \frac{4}{\mu} \sum_{k=0}^5 \frac{1}{r_k^3} - \frac{6}{\mu^2} \sum_{k=0}^5 \frac{1}{r_k^2} + \frac{4}{\mu^3} \sum_{k=0}^5 \frac{1}{r_k} + \frac{6}{\mu^4}$  ; on déduit :

$$\frac{1}{6} \sum_{k=0}^5 \frac{1}{r_k^4} = \frac{6}{\nu^4} + \frac{4}{\mu} \left(\frac{1}{\mu^3} + \frac{6}{\mu\nu^2}\right) - \frac{6}{\mu^2} \left(\frac{1}{\mu^2} + \frac{2}{\nu^2}\right) + \frac{4}{\mu^3} \times \frac{1}{\mu} - \frac{1}{\mu^4} = \frac{1}{\mu^4} + \frac{12}{\mu^2\nu^2} + \frac{6}{\nu^4}$$

On a aussi l'invariabilité de la moyenne des puissances 5 des courbures, car comme avec les puissances

3, on a l'égalité :  $\sum_{k=0}^5 \left(\frac{1}{r_k} - \frac{1}{\mu}\right)^5 = 0$ , dont on déduit :

$$\frac{1}{6} \sum_{k=0}^5 \frac{1}{r_k^5} = \frac{1}{6} \left( \frac{5}{\mu} \sum_{k=0}^5 \frac{1}{r_k^4} - \frac{10}{\mu^2} \sum_{k=0}^5 \frac{1}{r_k^3} + \frac{10}{\mu^3} \sum_{k=0}^5 \frac{1}{r_k^2} - \frac{5}{\mu^4} \sum_{k=0}^5 \frac{1}{r_k} + \frac{6}{\mu^5} \right) = \frac{1}{\mu^5} + \frac{20}{\mu^3\nu^2} + \frac{30}{\mu\nu^4}$$

## 5 Construction à l'aide des contacts entre sphère englobante et collier

### 5.1 Lieu des points de contacts

Les paragraphes précédents nous ont appris que dans le cas particulier d'un hexlet régulier, le collier et la sphère englobante  $\mathcal{S}_0$  de centre O et rayon R, sont en contacts sur un grand cercle de  $\mathcal{S}_0$ . On en déduit que dans un hexlet irrégulier aussi, le lieu des contacts entre sphères du collier et sphère englobante est un cercle. Il est obtenu comme intersection de l'inverse d'un plan et d'une sphère, par la bonne inversion qui permet de construire tout hexlet irrégulier, nous l'avons représenté en vert sur la figure 11. De même le lieu des contacts entre les 6 sphères du collier et les 2 sphères qu'elles enlacent, sont des cercles, nous les avons représenté en rouge sur la même figure. Cela se justifie en remarquant sur les figures 1 ou 2, que dans un hexlet régulier, ces contacts se situent sur les sphères  $\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2$ , et une sphère  $\mathcal{S}'$  de centre O et rayon  $\frac{R}{\sqrt{5}}$ . Après inversion pour obtenir l'hexlet irrégulier, les points de contacts sont à l'intersection des sphères inverses.

En faisant référence aux propriétés démontrées en A.2, par inversion toutes ces sphères sont transformées en sphères qui leurs sont homothétiques, avec pour centre d'homothétie, un point P qui est aussi pôle de l'inversion. Puisque ce pôle est situé dans un plan  $\mathcal{P}$  qui contient O,  $C_1, C_2$  et T, les centres de toutes les sphères considérées pour l'instant, sont donc dans ce même plan  $\mathcal{P}$ . Nos cercles de contact qui sont les intersections 2 à 2 de ces sphères, admettent donc  $\mathcal{P}$  pour plan de symétrie, leurs axes représentés en rouge et vert sur la figure 11 sont donc dans  $\mathcal{P}$ . On pourrait avoir  $O \in (C_1C_2)$ , auquel cas tous ces cercles ont le même axe  $(C_1C_2)$ , et  $\mathcal{P}$  pourrait être n'importe quel plan contenant  $C_1$  et  $C_2$ .

On a vu aussi en 3.2 que dans un hexlet, les sphères de volume maximum et minimum que nous pouvions placer dans un collier, avaient leurs centres dans  $\mathcal{P}$ . Nous avons calculé leurs rayons  $m$  et  $M$  en fin de paragraphe 3.4, cela a permis de construire ces 2 sphères représentées en bleu sur la figure 11. Sur chacun des 3 cercles rouge ou vert, toutes ces considérations permettent de déterminer 2 points diamétralement opposés, situés dans leur plan de symétrie commun  $\mathcal{P}$ . Ils deviennent alors aisément constructibles, dès qu'un de leurs diamètres est connu.

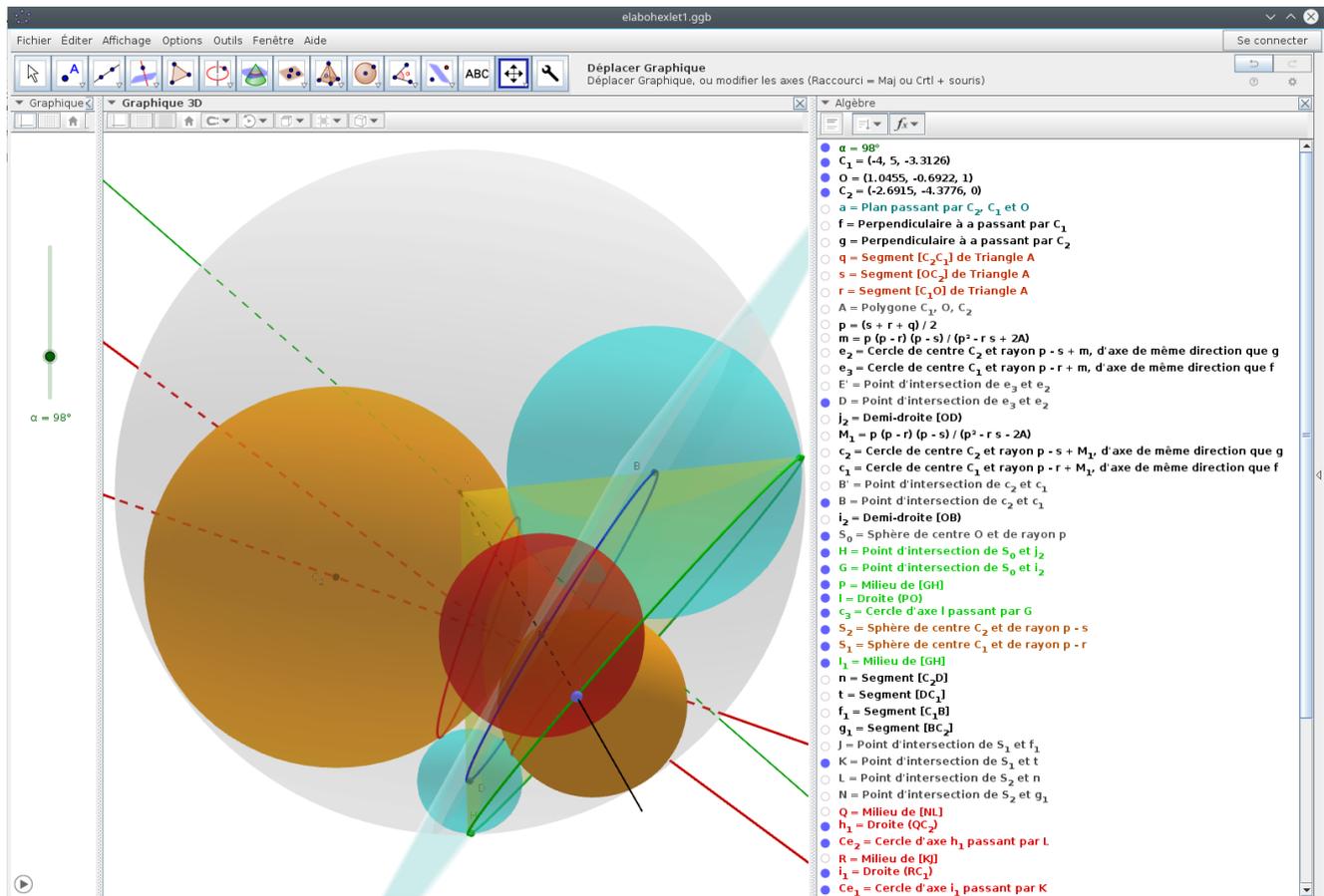


FIGURE 11 – Cercles de contact entre les sphères d’un hexlet.  
 Téléchargeable à l’URL : <http://mathmj.fr/geogebra/elabohexlet1.ggb>

Tout le protocole détaillé de construction peut être observé dans la fenêtre «Algèbre», sur la saisie d’écran en figure 11, de la feuille de calcul GEOGEBRA téléchargeable à l’URL indiquée.

## 5.2 Ellipse des centres des sphères du collier

Les centres des sphères du collier doivent être situés sur une génératrice du cône, qui admet  $O$  pour sommet et le cercle  $\mathcal{C}$  en vert pour cercle de base. On pourrait donc conjecturer que ce lieu des centres des sphères du collier, puisse être une conique; ce ne pourra-t-être qu’une ellipse, puisqu’elle est bornée en étant située entièrement à l’intérieur de  $\mathcal{S}_0$ . Si ce lieu est une section plane du cône, pour des raisons de symétrie déjà évoquées, il sera situé dans le plan perpendiculaire à  $\mathcal{P}$ , qui passe par les centres des 2 premières sphères extrêmes déjà construites. On peut vérifier expérimentalement avec GEOGEBRA, que tout point de l’intersection du cône avec ce plan représentée en bleu sur la figure 11, est bien susceptible d’être centre d’une sphère du collier.

Pour confirmer la situation coplanaires des centres, rappelons nous qu’ils sont les homothétiques des centres de sphères d’un hexlet régulier, en utilisant comme centre d’homothétie le pôle  $P$ , mais des rapports qui varient en fonction de la sphère à inverser (voir 3.1). Nous avons choisi (voir figure 9), un repère  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  dans lequel le cercle où situer le centre  $I(t)$  des sphères d’un hexlet régulier, avait pour représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x_1(t) = \frac{2R}{3} \sin \alpha \cos t \\ y_1(t) = \frac{2R}{3} \cos \alpha \cos t \\ z_1(t) = \frac{2R}{3} \sin t \end{cases} \quad \text{avec } t \in [-\pi; \pi[$$

Pour parvenir à notre hexlet quelconque, nous avons du transformer chaque sphère attaché au paramètre  $t$ , par homothétie de centre  $P \left( \frac{R^2}{d}; 0; 0 \right)$  et rapport  $h(t)$  (voir 3.2), Le lieu des centres  $I'(t)$  d’une sphère d’un

hexlet quelconque admet donc la représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x_V(t) = \frac{R^2}{d} + \frac{2Rh(t)\sin\alpha}{3} \cos t - \frac{h(t)R^2}{d} \\ y_V(t) = \frac{2Rh(t)\cos\alpha}{3} \cos t \\ z_V(t) = \frac{2Rh(t)}{3} \sin t \end{cases}$$

Pour vérifier que tous les points de notre courbe sont coplanaires, nous allons montrer que leurs projections orthogonales sur le plan  $xOy$  est un segment de droite. Pour cela, nous utiliserons les points particuliers  $I'(\frac{\pi}{2})$  et  $I'(-\frac{\pi}{2})$  qui se projettent sur le même point F de coordonnées  $(\frac{R^2}{d}(1-h(\pm\frac{\pi}{2})), 0, 0)$ , puis nous vérifierons simplement que la projection orthogonale du vecteur  $\overrightarrow{FI'(t)}$  sur  $xOy$ , a une direction indépendante de  $t$ . Or cette projection est égale à :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{u(t)} &= \left( \frac{2Rh(t)\sin\alpha \cos t}{3} + \frac{R^2(h(\pm\frac{\pi}{2})-h(t))}{d} \right) \vec{i} + \frac{2Rh(t)\cos\alpha \cos t}{3} \vec{j} \\ \overrightarrow{u(t)} &= \frac{2Rh(t)\cos t}{3} \left( \left( 1 + \frac{3R}{2d \sin\alpha \cos t} \left( \frac{h(\pm\frac{\pi}{2})}{h(t)} - 1 \right) \right) \sin\alpha \vec{i} + \cos\alpha \vec{j} \right) \end{aligned}$$

En tenant compte de  $\frac{h(\pm\frac{\pi}{2})}{h(t)} - 1 = \frac{3R^2 + d^2 - 4dR \sin\alpha \cos t}{3R^2 + d^2} - 1 = -\frac{4dR \sin\alpha \cos t}{3R^2 + d^2}$ , on obtient  $\overrightarrow{u(t)} = \frac{2Rh(t)\cos t}{3} \vec{v}$ , où le vecteur  $\vec{v} = \left( 1 - \frac{6R^2}{3R^2 + d^2} \right) \sin\alpha \vec{i} + \cos\alpha \vec{j}$  a une direction indépendante de  $t$ . Le lieu des centres des sphères du collier est donc bien une ellipse, ce qui est confirmé sous GEOGEBRA, en observant qu'on peut toujours construire une sphère tangente aux trois sphères initiales, à partir d'un centre choisi de manière quelconque sur cette ellipse. La figure 11 téléchargeable à l'URL indiquée, permet une animation de cette vérification.

### 5.3 Exentricité de l'ellipse lieu des centres des sphères du collier

Posons  $\vec{v}' = \frac{1}{\|\vec{v}\|} \vec{v}$  le vecteur normalisé de  $\vec{v}$ , pour exprimer  $\overrightarrow{FI'(t)}$  :

$$\overrightarrow{FI'(t)} = \overrightarrow{u(t)} + \frac{2Rh(t)}{3} \sin t \vec{k} = \frac{2Rh(t)}{3} (\cos t \vec{v} + \sin t \vec{k}) = \frac{2Rh(t)}{3} (\|\vec{v}\| \cos t \vec{v}' + \sin t \vec{k})$$

Dans son plan muni du repère orthonormé  $(F, \vec{v}', \vec{k})$ , notre ellipse  $\mathcal{E}$  résulte donc de la transformation par affinité qui multiplie les abscisses par  $\|\vec{v}\|$ , de ellipse  $\mathcal{E}'$  dont l'équation en coordonnées polaires relativement à l'axe  $(F, \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|})$  est  $\rho = \frac{2ph(\theta)}{3} = 2r(\theta)$ . En reprenant les expressions de  $h(\theta)$  ou  $r(\theta)$  en fin de paragraphe 3.4, on peut exprimer le paramètre  $p'$  et l'exentricité  $e'$  de cette ellipse, en fonction des caractéristiques du triangle  $OC_1C_2$ , en ramenant cette équation en coordonnées polaires à sa forme standard :

$$\rho = \frac{p'}{1 - e' \cos\theta} \quad \text{où l'on a posé : } p' = \frac{2p(p-r)(p-s)}{p^2 - rs} \quad \text{et} \quad e' = \frac{2\mathcal{A}}{p^2 - rs} = \frac{2\mu}{v}$$

En coordonnées cartésiennes dans le repère orthonormé  $(F, \vec{v}', \vec{k})$ ,  $\mathcal{E}'$  admet l'équation  $\frac{x^2}{a'^2} + \frac{y^2}{b'^2} = 1$ , avec  $e' = \sqrt{1 - \frac{b'^2}{a'^2}}$ , donc  $\mathcal{E}$  admet l'équation  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ , avec  $a = a' \|\vec{v}\|$  et  $b = b'$ . Il est remarquable que l'on puisse aussi exprimer  $\|\vec{v}\|^2$  en fonction des caractéristiques  $\mu$  et  $v$  de l'hexlet :

$$\|\vec{v}\|^2 = \frac{(d^2 - 3R^2)^2 \sin^2\alpha + (d^2 + 3R^2)^2 \cos^2\alpha}{(d^2 + 3R^2)^2} = \frac{(d^2 + 3R^2)^2 - 12R^2 d^2 \sin^2\alpha}{(d^2 + 3R^2)^2} = 1 - 3 \left( \frac{2Rd \sin\alpha}{d^2 + 3R^2} \right)^2 = 1 - 3 \frac{\mu^2}{v^2}$$

On en déduit que l'exentricité  $e$  de  $\mathcal{E}$  vérifie :  $e^2 = 1 - \frac{b^2}{a^2} = 1 - \frac{1 - e'^2}{\|\vec{v}\|^2} = 1 - \left( 1 - 4 \frac{\mu^2}{v^2} \right) : \left( 1 - 3 \frac{\mu^2}{v^2} \right)$

Son exentricité est donc :

$$e = \frac{\mu}{\sqrt{v^2 - 3\mu^2}} = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{v}{\mu}\right)^2 - 3}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{(p^2 - rs)^2}{\mathcal{A}^2} - 3}} = \frac{\mathcal{A}}{\sqrt{(p^2 - rs)^2 - 3\mathcal{A}^2}}$$

$e^2$  aurait pu être égal à  $1 - \frac{a^2}{b^2} = \frac{-\mu^2}{\nu^2 - 4\mu^2}$ , mais cette éventualité peut être écartée, car ce nombre est négatif, étant donné que  $e' = \frac{2\mu}{\nu}$  est l'excentricité d'une ellipse, et que par conséquent  $e' \in ]0; 1[$  entraîne  $\nu^2 - 4\mu^2 > 0$ . On obtient une excentricité nulle, donc un cercle, lorsque que le triangle  $OC_1C_2$  est aplati et que son aire est nulle. Ceci était prévisible pour des raisons de symétrie, et de plus  $\nu = 0$  entraîne que toutes les sphères du collier ont le même rayon  $\mu$ . La figure 12 reprend en détail toute la construction d'un hexlet sous GEOGEBRA, dans laquelle n'intervient que la représentation paramétrique de notre ellipse  $\mathcal{E}$ , les cercles de contacts ont été construits en utilisant 3 points leur appartenant, obtenus à partir de trois valeurs particulières du paramétrage de  $\mathcal{E}$ .

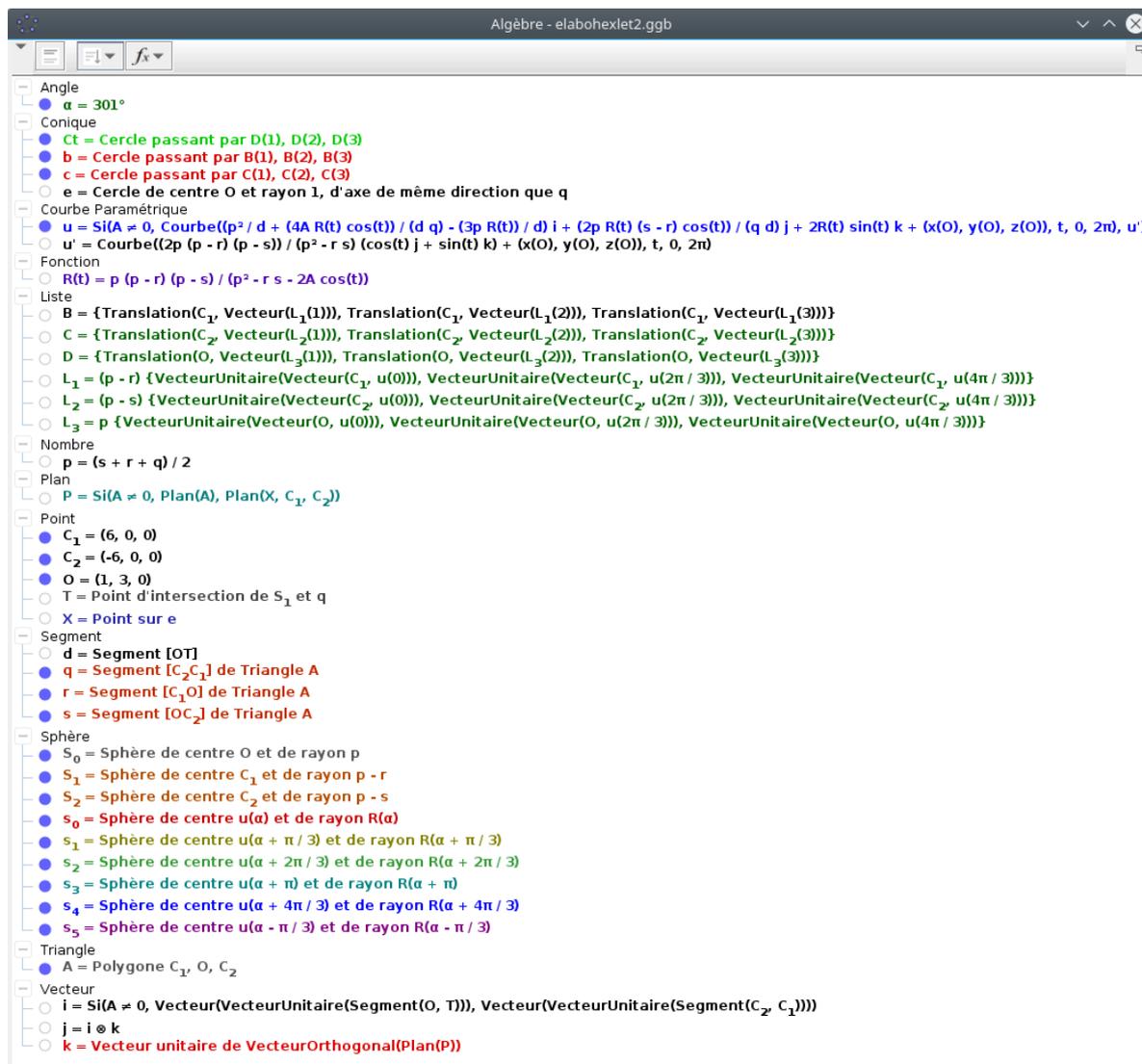


FIGURE 12 – Construction à partir du paramétrage de l'ellipse pour  $OC_1C_2$  quelconque.

Téléchargeable à l'URL : <http://mathmj.fr/geogebra/elabohexlet2.ggb>

Dans le cas de l'hexlet régulier, le vecteur unitaire  $\vec{i}$  lié à  $\overrightarrow{OT}$  ne pouvant être défini, on lui a substitué le vecteur unitaire lié à  $\overline{C_1C_2}$ . Lorsque  $O, C_1$  et  $C_2$  sont alignés, le plan  $\mathcal{P}$  de symétrie de l'hexlet ne peut plus être défini par ces 3 points, c'est pour disposer tout de même d'un plan de symétrie, qu'on a choisi de manière arbitraire un point  $X$  en dehors de la droite  $(C_1C_2)$ . Dans ces conditions, la construction d'un cercle doit être substituée à celle d'une ellipse, dont le calcul du paramétrage était rendu impossible avec  $d = 0$ . On peut alors définir notre repère orthonormé direct  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ , à l'aide d'un vecteur unitaire  $\vec{k}$  orthogonal à  $\mathcal{P}$  et  $\vec{j} = \vec{i} \wedge \vec{k}$ .

## A Annexe : quelques propriétés des inversions

On trouvera des précisions sur les propriétés des inversions à l'adresse suivante [http://www.debart.fr/ts/inversion\\_cercles.html](http://www.debart.fr/ts/inversion_cercles.html).

Ce site parle de l'inversion dans le plan, avec des figures dynamiques sous Geogebra2D très documentées, beaucoup de propriétés sont facilement généralisables à un espace euclidien de dimension quelconque, comme nous allons le faire ci-dessous.

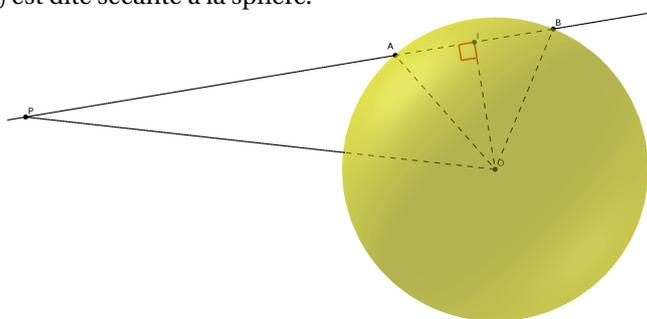
**DÉFINITION 1** *Étant donné un espace euclidien  $\mathcal{E}_n$  de dimension  $n$  quelconque, on lui adjoint un point à l'infini noté  $\infty$  pour définir une transformation involutive de  $\mathcal{E}_n \cup \{\infty\}$ . Étant donné un point particulier  $P \in \mathcal{E}_n$  et un réel  $k \in \mathbb{R}^*$ , on appelle inversion de pôle  $P$  et puissance  $k$  la transformation qui échange  $P$  et  $\infty$ , et qui applique  $M \in \mathcal{E}_n \setminus \{P\}$  sur l'unique point  $M'$  de la droite  $(PM)$  tel que  $\overrightarrow{PM} \cdot \overrightarrow{PM'} = k$ , on notera cette image :  $\mathcal{I}_{(P;k)}(M)$ .*

Pour étudier la transformation par inversion d'une sphère de  $\mathcal{E}_n$ , nous avons besoin au préalable de rappeler la définition de la puissance d'un point par rapport à une sphère.

### A.1 Puissance d'un point par rapport à une sphère

Soient  $P$  un point quelconque de l'espace euclidien  $\mathcal{E}_n$  et  $A$  un point de la sphère de centre  $O$  et rayon  $r$ , ensemble des points  $M$  de  $\mathcal{E}_n$  tels que  $\overrightarrow{OM}^2 = r^2$ . Lorsque  $P \neq A$ , on peut considérer le projeté orthogonal  $I$  du centre  $O$  sur la droite  $(PA)$ , on montre alors qu'il n'existe au plus qu'un seul autre point de la sphère sur la droite  $(PA)$ . On a  $IA^2 + IO^2 = r^2$  et par conséquent  $OI \leq r$ ; il faut alors étudier différemment deux possibilités, selon que  $OI = r$  ou  $OI < r$

- si  $OI = r$ , alors  $IA = 0$  et  $I$  est donc confondu avec  $A$  sur la sphère, La droite  $(PA)$  est dite tangente à la sphère, car pour tout point  $B \in (PA) \setminus \{A\}$  on a  $OB^2 = OI^2 + IB^2 > r^2$  étant donné que  $B \neq I = A$ , le point  $B$  est donc extérieur à cette sphère.
- si  $OI < r$ ,  $I$  est à l'intérieur de la sphère, montrons que  $(PA)$  recoupe alors la sphère en un unique point différent de  $A$ . Tout autre point  $B$  de la droite  $(PA)$  peut être défini par le réel  $\lambda$  tel que :  $\overrightarrow{IB} = \lambda \overrightarrow{IA}$ , on a  $OB^2 = OI^2 + IB^2 = OI^2 + \lambda^2 IA^2$ . Le point  $B$  est alors sur la sphère si et seulement si  $OI^2 + \lambda^2 IA^2 = r^2 = OI^2 + IA^2$ . On a donc  $\lambda = \pm 1$ . Quelque soit la dimension  $n \geq 2$  de l'espace  $\mathcal{E}_n$ , la droite  $(PA)$  n'a donc que deux points d'intersection avec la sphère, de plus leur milieu est le projeté orthogonal du centre de la sphère sur cette droite; la droite  $(PA)$  est dite sécante à la sphère.



Dans le premier cas avec  $(PA)$  tangente à la sphère on a :  $PA^2 = PO^2 - r^2$ . Dans le deuxième cas avec  $(PA)$  sécante à la sphère on a :

$$\overrightarrow{PB} \cdot \overrightarrow{PA} = (\overrightarrow{PI} + \overrightarrow{IB}) (\overrightarrow{PI} + \overrightarrow{IA}) = (\overrightarrow{PI} + \overrightarrow{IB}) (\overrightarrow{PI} - \overrightarrow{IB}) = PI^2 - IB^2 = PI^2 + IO^2 - r^2 = PO^2 - r^2$$

On peut considérer que  $A = B$  lorsque  $(PA)$  est tangente à la sphère, dans les deux cas le produit scalaire  $\overrightarrow{PB} \cdot \overrightarrow{PA}$  éventuellement égal à  $PA^2$ , est indépendant du point  $A$  choisi sur la sphère. C'est ce réel qu'on appelle **puissance de  $P$  par rapport à la sphère**. On pourra donc exprimer ce réel dépendant seulement de  $P$  et de la sphère  $\mathcal{S}$ , par tout produit scalaire  $\overrightarrow{PB} \cdot \overrightarrow{PA}$ , où  $A$  et  $B$  sont deux points sur la sphère tels que  $P \in (AB)$ , ou bien par  $PA^2$  si  $(PA)$  est tangente à la sphère. On pourra le noter  $p_{\mathcal{S}}(P)$

### A.2 Inversion d'une sphère en dimension quelconque

Supposons que l'on veuille inverser la sphère  $\mathcal{S}(O, r)$  de centre  $O$  et rayon  $r$ , par une inversion de puissance  $h$  et pôle  $P$ . On doit étudier différemment deux cas, selon que le pôle appartient ou n'appartient pas à la sphère.

### A.2.1 $P \notin \mathcal{S}(O, r)$

- Si  $PO^2 - r^2 = h$

Pour tout point A sur la sphère, nous venons de voir dans le paragraphe précédent, qu'il existe un point  $B \in \mathcal{S} \cap (PA)$  éventuellement confondu avec A, tel que le produit scalaire  $\vec{PB} \cdot \vec{PA}$  soit la puissance de P par rapport à  $\mathcal{S}_0$ . Nous avons supposé que cette puissance est égale à  $h$ . Ce point B est donc l'inverse de A, car le point ayant ces propriétés est unique. Nous sommes dans la configuration particulière où la sphère est globalement invariante par inversion.

- Si  $PO^2 - r^2 \neq h$

Nous pouvons toujours considéré l'unique point B de  $\mathcal{S} \cap (PA)$  éventuellement confondu avec A, tel que  $\vec{PB} \cdot \vec{PA} = PO^2 - r^2$ . Pour obtenir l'inverse de A avec une puissance  $h \neq PO^2 - r^2$ , il suffit de construire le point B' tel que  $\vec{PB}' = \frac{h}{PO^2 - r^2} \vec{PB}$ , le produit scalaire  $\vec{PB}' \cdot \vec{PA}$  est en effet égal à  $\frac{h}{PO^2 - r^2} \vec{PB} \cdot \vec{PA} = h$ .

Dans les deux cas, on voit que la sphère inverse de  $\mathcal{S}(O, r)$  par l'inversion de pôle P et puissance  $h$  est aussi la sphère homothétique de  $\mathcal{S}_0$  par l'homothétie de centre P et rapport  $\frac{h}{PO^2 - r^2}$ . Globalement la sphère image est la même par inversion ou homothétie, même si ces transformations opèrent différemment sur chaque point, cela permet de calculer le rayon de la sphère inverse ou homothétique de  $\mathcal{S}(O, r)$  qui est  $\frac{hr}{PO^2 - r^2}$ . Si l'inversion est de puissance positive, la sphère centrée sur le pôle de l'inversion et rayon égal à la racine carrée positive de la puissance est strictement invariante, en dehors de ce cas, l'étude de la première situation particulière, nous fournit le lemme utile suivant :

**LEMME 1** Une sphère (non strictement invariante) est globalement invariante par une inversion, si et seulement si la puissance de son pôle par rapport à cette sphère, est égale à la puissance de l'inversion.

### A.2.2 $P \in \mathcal{S}(O, r)$

On peut généraliser le résultat précédent sur le calcul du rayon d'une sphère inversée, en remarquant qu'un point sur la sphère a une puissance nulle par rapport à cette sphère. Il suffit alors de supposer que la division par cette puissance nulle admet le résultat  $\infty$ . Ainsi le calcul du rayon de la sphère inversée nous amène à envisager une sphère de rayon  $\infty$ , que nous assimilerons à un plan, et nous allons montrer effectivement que nous obtenons un plan, en envisageant comme précédemment deux situations.

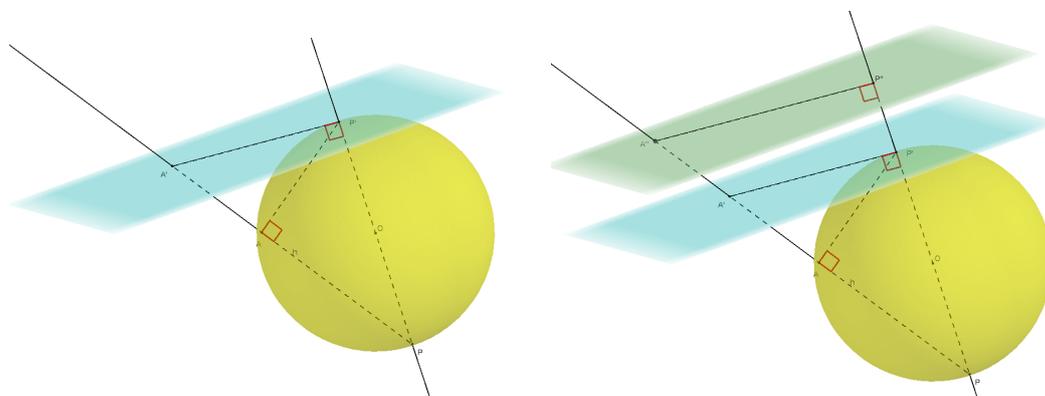


FIGURE 13 – Inversion d'une sphère qui contient le pôle.

- Si  $h = 4r^2$

Soit le point P' sur cette sphère, diamétralement opposé au pôle P, puis considérons le plan  $\mathcal{D}$  tangent à la sphère en P'. Pour tout point  $A \in \mathcal{S}(O, r)$ , la droite (PA) traverse le plan  $\mathcal{D}$  en A', tel que  $\vec{PA} \cdot \vec{PA}' = PP'^2 = h$ , car APP' et A'PP' sont des triangles rectangles semblables. Tout point de la sphère  $\mathcal{S}(O, r)$  a donc son inverse sur le plan  $\mathcal{D}$ , et réciproquement tout point du plan a son inverse sur la sphère, car dans le raisonnement de la proposition précédente, on peut inverser les rôles de la sphère et du plan. Étant donné que P' est l'inverse de P, on peut aussi énoncer ce lemme utile dans la recherche de plans tangents à plusieurs sphères.

**LEMME 2** L'image d'une sphère par une inversion dont le pôle est sur cette sphère, et dont la puissance est le carré du diamètre, est un plan tangent à la sphère, en un point diamétralement opposé au pôle.

- Si  $h \neq 4r^2$

Considérons le plan  $\mathcal{P}'$  homothétique du plan  $\mathcal{P}$  dans l'homothétie de centre P et rapport  $\frac{h}{PP'^2}$ , pour tout point  $A \in \mathcal{S}(O, r)$ , la droite (PA) traverse  $\mathcal{P}'$  en  $A''$ , tel que  $\overrightarrow{PA''} = \frac{h}{PP'^2} \overrightarrow{PA}$ . On a donc :  $\overrightarrow{PA''} \cdot \overrightarrow{PA} = \frac{h}{PP'^2} \overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PA} = h$ , qui prouve que A et  $A''$  sont inverses l'un de l'autre par l'inversion de pôle P et puissance h. La sphère  $\mathcal{S}(O, r)$  et le plan  $\mathcal{P}'$  sont donc inverses l'un de l'autre.

Le même type de raisonnement montrerait qu'un plan ne contenant pas le pôle de l'inversion, a pour inverse une sphère. Si le plan contient le pôle, il est de manière évidente son propre inverse.

### A.3 Construction de l'inverse d'un cercle dans l'espace de dimension 3

Une sphère de l'espace euclidien de dimension 2, c'est à dire un cercle est inversé en un cercle, mais qu'en est-il d'un cercle dans un espace de dimension 3? Il suffit de voir qu'en dimension 3, un cercle est l'intersection d'un plan et d'une sphère. Si le pôle est extérieur au cercle et au plan, ces deux objets sont transformés en deux sphères dont l'intersection est un cercle.

Un procédé de construction est détaillé sous Geogebra dans la figure 14, pour transformer par inversion de pôle P et puissance h, le cercle mauve, intersection du plan bleu et d'une sphère rouge; cette dernière est transformée en la deuxième sphère rouge en tenant compte des résultats du paragraphe précédent. Le plan bleu est transformé en la sphère bleu qui passe par P et l'inverse du centre du cercle contenu dans le plan. il a suffit de construire la sphère centrée à l'intersection de la perpendiculaire au plan passant par le pôle, avec le plan médiateur du pôle et de l'inverse du centre du cercle (plan gris sur cette figure). Le cercle image obtenu est l'intersection de la sphère bleue et de la deuxième sphère rouge.

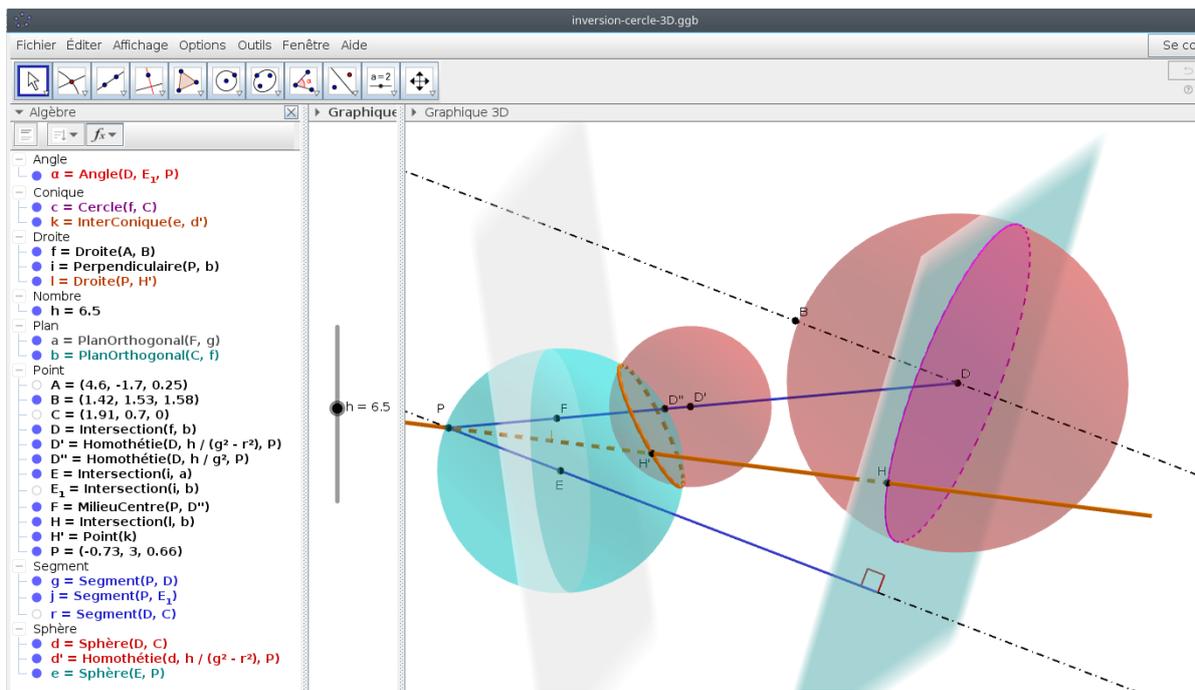


FIGURE 14 – Inversion d'un cercle en dimension 3.

Téléchargeable à l'URL <http://mathmj.fr/geogebra/inversion-cercle-3D.ggb>

### A.4 Théorème utile au calcul des rayons de l'hexlet

**THÉORÈME 1** Dans un plan, étant donné une inversion  $\mathcal{I}$  et deux cercles  $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$  transformés l'un de l'autre par cette inversion, si des points  $A_1 \in \mathcal{C}_1$  et  $A_2 \in \mathcal{C}_2$  sont deux points distincts inverses l'un de l'autre, les tangentes à  $\mathcal{C}_1$  en  $A_1$  et  $\mathcal{C}_2$  en  $A_2$  sont symétriques par rapport à la médiatrice de  $[A_1A_2]$ .

Soit  $O_1$  le centre de  $\mathcal{C}_1$ , deux cas de figure sont à examiner :

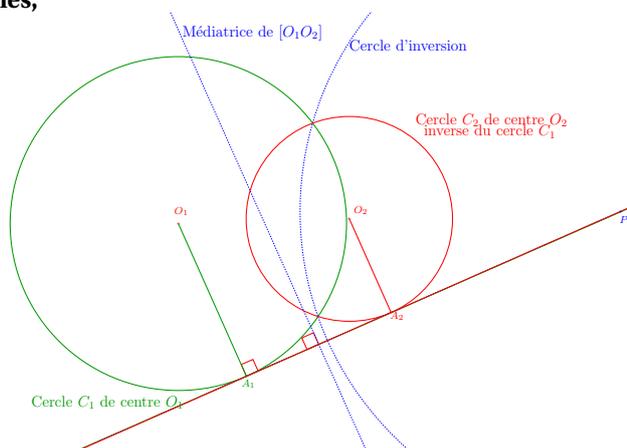
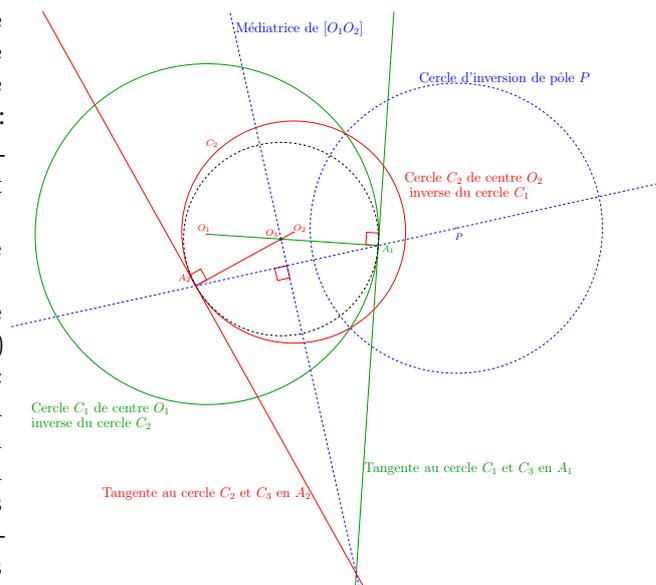
- $(O_1A_1)$  et la médiatrice de  $[A_1A_2]$  sont sécantes.

Le point d'intersection  $O_3$  permet de construire un cercle centré sur ce point passant par  $A_1$ .  $\mathcal{C}_3$  passe par  $A_2$  car  $O_3$  qui est sur la médiatrice de  $[A_1A_2]$  est équidistant de  $A_1$  et  $A_2$ , étant donné le pôle  $P$  de notre inversion  $\mathcal{I}$ , sa puissance peut être exprimée par la puissance de  $P$  par rapport à  $\mathcal{C}_3$  :  $\overrightarrow{PA_1} \cdot \overrightarrow{PA_2}$ . On en déduit que  $\mathcal{C}_3$  est globalement invariant par l'inversion de pôle  $P$  qui échange  $A_1$  et  $A_2$ .

Le cercle  $\mathcal{C}_3$  est tangent à  $\mathcal{C}_1$  en  $A_1$  car son centre  $O_3$  appartient à  $(O_1A_1)$ .  $\mathcal{C}_2$  est lui aussi tangent à  $\mathcal{C}_3$  en  $A_2$ , car si ces deux cercles avaient un deuxième point d'intersection  $A'_2$  distinct de  $A_2$ ,  $\mathcal{I}(A_2)$  et  $\mathcal{I}(A'_2)$  devraient être distincts. Ceci est contradictoire avec le fait que ces deux points devraient appartenir à  $\mathcal{I}(\mathcal{C}_3) = \mathcal{C}_3$  et  $\mathcal{I}(\mathcal{C}_2) = \mathcal{C}_1$ , qui n'ont en commun qu'un seul point. La droite tangente à  $\mathcal{C}_1$  en  $A_1$  et la droite tangente à  $\mathcal{C}_2$  en  $A_2$  sont donc des tangentes au même cercle  $\mathcal{C}_3$ ; elles sont par conséquent symétriques par rapport à la médiatrice des 2 points de contact  $A_1$  et  $A_2$ .

- $(O_1A_1)$  et la médiatrice de  $[A_1A_2]$  sont parallèles,

la droite  $(A_1A_2)$  est donc perpendiculaire à  $(O_1A_1)$  et se trouve donc être la tangente à  $\mathcal{C}_1$  en  $A_1$ , comme le cercle  $\mathcal{C}_3$  dans le cas de figure précédent, la droite  $(A_1A_2)$  est globalement invariante par inversion, le même raisonnement permet de montrer qu'elle est aussi tangente à  $\mathcal{C}_2$  en  $A_2$ . La conclusion du théorème devient triviale, puisque cette tangente commune aux deux cercles est sa propre symétrique par rapport à toute droite qui lui est perpendiculaire.



Ce théorème nous est utile ici en dimension 2, mais on pourrait remplacer cercle par sphère en dimension 3, droite tangente par plan tangent et médiatrice par plan médiateur.