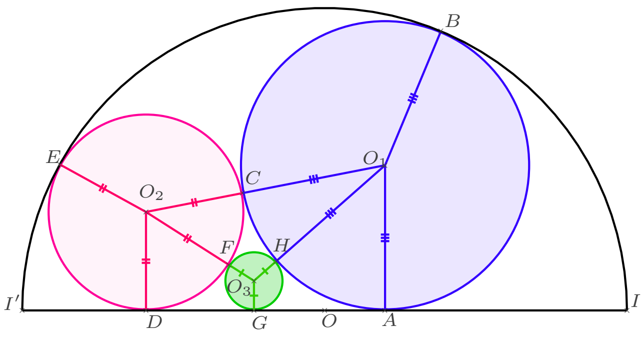
1 Énoncé du problème :

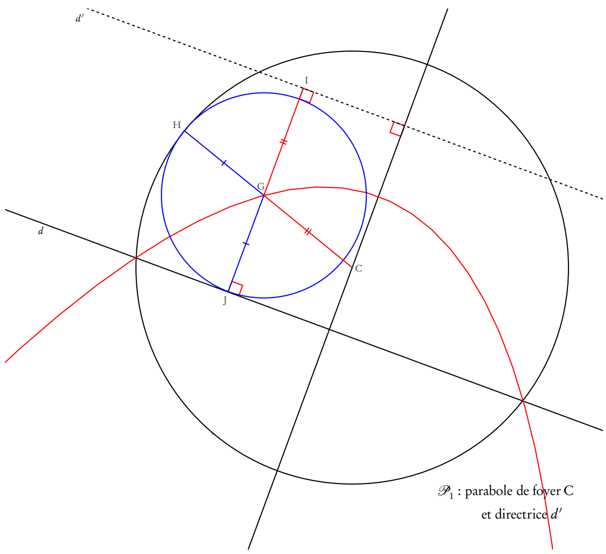
Déterminer la borne supérieure du rayon du plus petit cercle de ce sangaku, constitué de 3 cercles inscrits dans ce demi-disque de rayon r=4, admettant [I′I] pour diamètre.



2 Préliminaires :

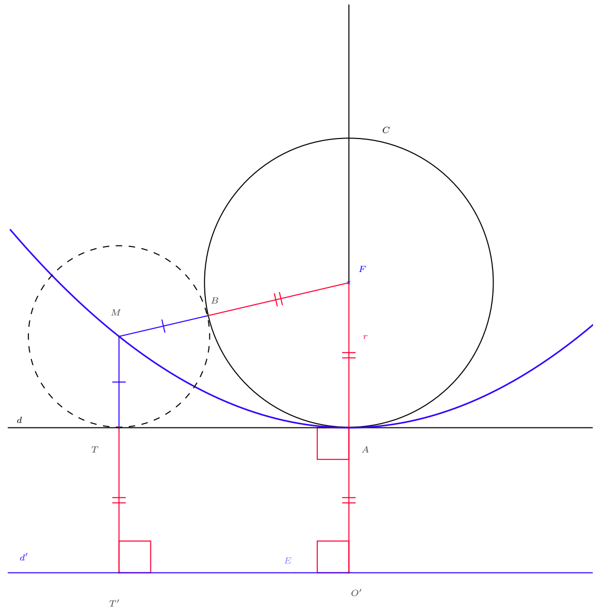
Nous nous appuierons sur la propiété illustrée par la figure à droite, qui montre que le lieu du centre d'un cercle tangent à la fois, à une droite d et un cercle $\mathscr{C}$ de centre C et rayon R est une parabole. Le foyer de cette parabole est le centre du cercle donné au départ, la directrice est une droite parallèle à d, construite de manière que la distance entre d et d' soit égale à R. Pour pouvoir tracer le cercle en bleu sur cette figure, il faut en effet que son rayon r = GH = GJ vérifie GC = GI = R − r.

La distance entre le foyer et la directrice est appellé traditionellement, paramètre p de la parabole. Pour exprimer simplement l'équation de cette parabole, on choisit un repère orthonormé, dont le premier axe est équidistant du foyer et de la directrice et dont le deuxième axe orthogonal au premier, passe par le foyer. Ce point a donc pour coordonnées $\left(0; \frac{p}{2}\right)$, l'équation de cette parabole est alors : $x^2 = 2py$.

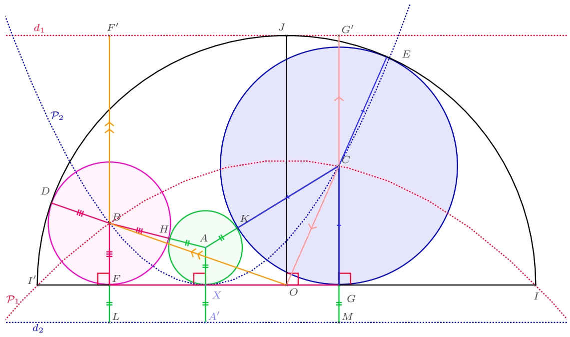


Pour la résolution de notre problème, nous devrons envisager le cas de figure à droite, où le cercle $\mathscr{C}$ et d sont eux mêmes tangents. Dans ce cas là, la parabole passe par le point de contact A entre $\mathscr{C}$ et d, et le paramètre de la parabole est 2R. Dans un repère d'origine A, admettant la droite d pour axe des abscisses, l'équation de cette parabole est :

$$\boxed{y = \frac{x^2}{4R}}$$



3 Solution du problème :



Nommons $\mathscr{C}_0$ le demi cercle de diamètre $[\mathrm{II}']$, nous proposons de construire ce sangaku en partant d'un cercle $\mathscr{C}_3$ quelconque, (en vert sur cette figure), tangent au diamètre $[\mathrm{II}']$. Dans le repère orthonormé direct d'origine O, où I et J ont respectivement pour coordonées $(4;0)$ et $(0;4)$, le centre A de $\mathscr{C}_3$ a pour coordonnées (X,R) où R est le rayon du cercle. Nous pourrons alors construire de manière unique les cercles $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$, respectivement de centres B et C et rayons R_1 et R_2, tracés en rouge et bleu sur cette figure, qui devront être tous les deux tangents à $\mathscr{C}_3$, au demi cercle $\mathscr{C}_0$ et à son diamètre $[\mathrm{II}']$. Nous chercherons alors la valeur imposée à R en fonction de X pour que $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ soient eux mêmes tangents.

- Pour que $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ soient tangents à $\mathscr{C}_0$ et (II'), il faut que leurs centres soient sur la parabole $\mathscr{P}_1$ de foyer O et directrice d_1 d'équation $y=4$, car nous devons avoir $\mathrm{BF}'=\mathrm{BO}=4-\mathrm{R}_1$ et $\mathrm{CG}'=\mathrm{CO}=4-\mathrm{R}_2$.

  Cette parabole $\mathscr{P}_1$ admet pour équation $y=f(x)$ où l'on a posé $f(x)=2-\dfrac{1}{8}x^2$

- Pour que $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ soient tangents à $\mathscr{C}_3$ et (II'), il faut que leurs centres soient sur la parabole $\mathscr{P}_2$ de foyer A et directrice d_2 d'équation $y=-\mathrm{R}$, car nous devons avoir : $\mathrm{BL}=\mathrm{BA}=\mathrm{R}+\mathrm{R}_1$ et $\mathrm{CM}=\mathrm{CA}=\mathrm{R}+\mathrm{R}_2$,.

  Cette parabole $\mathscr{P}_2$ de paramètre $p=\mathrm{AA}'=2\mathrm{R}$ admet pour équation $y=g(x)$ ou l'on a posé $g(x)=\dfrac{(\mathrm{X}-x)^2}{4\mathrm{R}}$

Les abscisses x_B et x_A des centres B et C sont donc les deux solutions de l'équation du second degré $f(x)=g(x)$; les ordonnées vérifient $y_\mathrm{B}=f(x_\mathrm{B})=g(x_\mathrm{B})$ et $y_\mathrm{C}=f(x_\mathrm{C})=g(x_\mathrm{C})$, on obtient ainsi l'équation en l'inconnue x :

$$(2+\mathrm{R})x^2-4\mathrm{X}x+2\mathrm{X}^2-16\mathrm{R}=0 \qquad (1)$$

Pour que les cercles $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ soient tangents comme dans la figure de l'énoncé, il faut que la somme de leurs rayons soit égale à la distance BC. On en déduit que le sangaku est constructible si et seulement si X et R sont liés par l'équation :

$$\mathrm{BC}^2=(y_1+y_2)^2 \iff (x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2=(y_1+y_2)^2 \iff (x_1-x_2)^2=4y_1y_2$$

Exprimons les rayons de $\mathscr{C}_1$ et$\mathscr{C}_1$à l'aide $g(x_1)$ et $g(x_2)$, on obtient :

$$4y_1y_2=4\frac{(\mathrm{X}-x_1)^2}{4\mathrm{R}}\times\frac{(\mathrm{X}-x_2)^2}{4\mathrm{R}}=\left(\frac{x_1x_2-\mathrm{X}(x_1+x_2)+\mathrm{X}^2}{2\mathrm{R}}\right)^2$$

Si nous revenons à l'équation (1) dont x_1 et x_2 sont les racines, leur somme est $\dfrac{4\mathrm{X}}{2+\mathrm{R}}$, leur produit est $\dfrac{2\mathrm{X}^2-16\mathrm{R}}{2+\mathrm{R}}$.

$$\text{On a donc : } 4y_1y_2=\left(\frac{2\mathrm{X}^2-16\mathrm{R}-4\mathrm{X}^2+2\mathrm{X}^2+\mathrm{R}\mathrm{X}^2}{2\mathrm{R}(2+\mathrm{R})}\right)^2=\frac{1}{4}\frac{\left(16-\mathrm{X}^2\right)^2}{(2+\mathrm{R})^2}$$

Soit $\Delta=16\mathrm{X}^2-4(2+\mathrm{R})(2\mathrm{X}^2-16\mathrm{R})=64\mathrm{R}^2+8(16-\mathrm{X}^2)\mathrm{R}$ le discriminant de l'équation (1).

$$\text{On a : }(x_1-x_2)^2=\frac{\Delta}{(2+\mathrm{R})^2}=\frac{64\mathrm{R}^2+8(16-\mathrm{X}^2)\mathrm{R}}{(2+\mathrm{R})^2}$$

Ce qui nous permet d'écrire l'équation $(x_1-x_2)^2=4y_1y_2$ qui lie X et R sous la forme suivante :

$$256\mathrm{R}^2+32\left(16-\mathrm{X}^2\right)\mathrm{R}=\left(16-\mathrm{X}^2\right)^2 \Leftrightarrow \left[16\mathrm{R}+(16-\mathrm{X}^2)\right]^2=2\left(16-\mathrm{X}^2\right)^2$$

Les solutions de cette équation en R sont : $\dfrac{\pm\sqrt{2}-1}{16}(16-\mathrm{X}^2)$, on en déduit l'application de $[-4;4]$ à valeurs dans $\mathbb{R}^+$

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{F}: [-4;4] & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ \mathrm{X} & \longmapsto & \dfrac{\sqrt{2}-1}{16}(16-\mathrm{X}^2) \end{array}$$

dont le maximum est obtenue pour $\mathrm{X}=0$.

Le rayon maximum pour le plus petit cercle est donc $\sqrt{2}-1$

La figure construite avec geogebra ci-dessous, accessible à l'URL : http://mathmj.fr/geogebra/sangaku1.ggb permet de déplacer le point A sur la parabole $\mathscr{P}_3$ pour observer les variations des différents rayons.