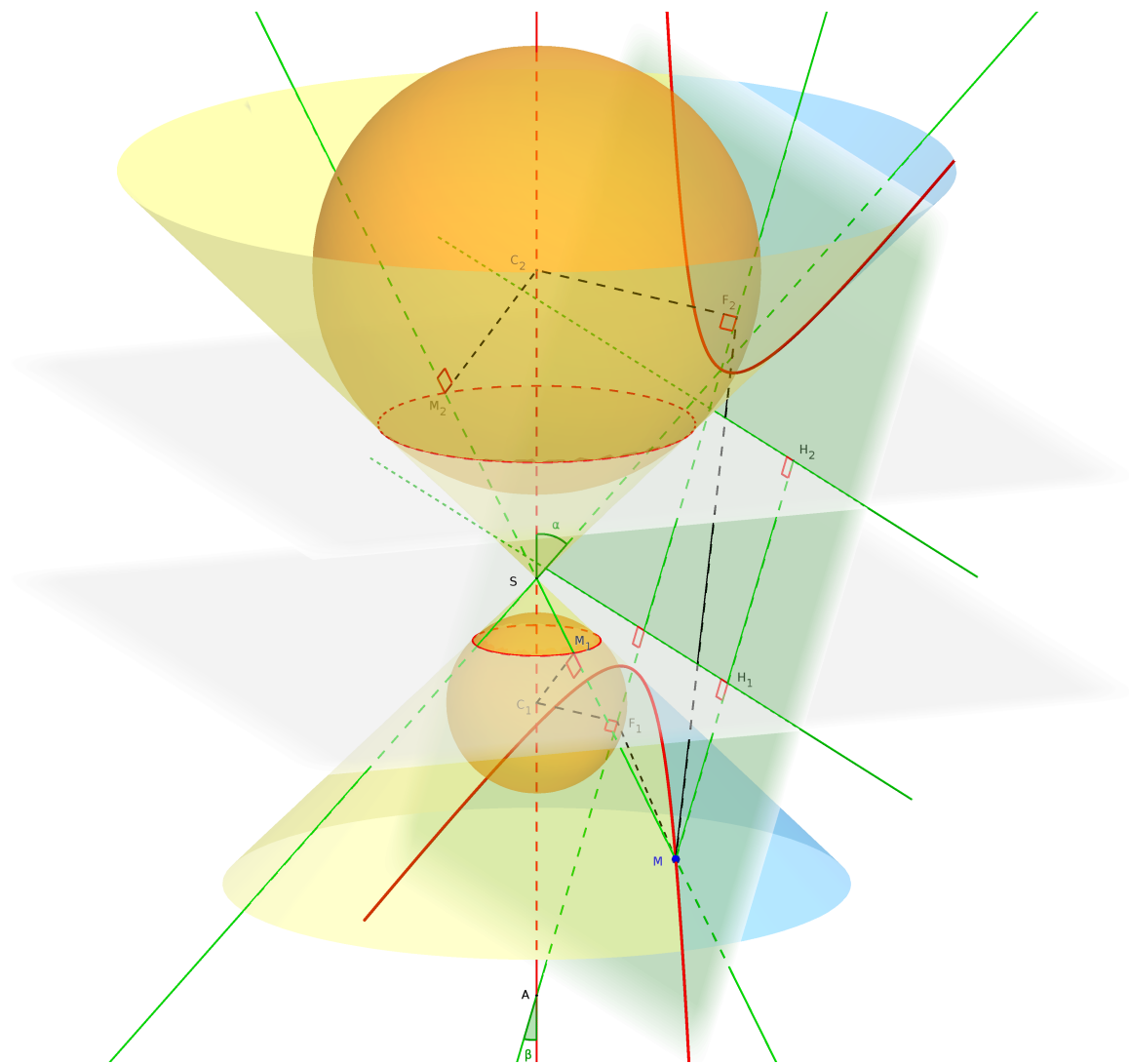


ÉTUDIONS LES CONIQUES AVEC GeoGebra




$$|MF_1 - MF_2| = C_1C_2 \cos \alpha$$

$$e = \frac{\cos \beta}{\cos \alpha}$$

$$F_iM = eMH_i$$

Jacques MAROT

Avant Propos

Nul ne peut prétendre à l'originalité dans l'étude de ces courbes appelées coniques, désignées depuis plus de 24 siècles. Mais trop d'ouvrages modernes de niveau universitaire étudient et classifient les coniques en temps que courbes planes algébriques du second degré, en sous-entendant et considérant comme connues de tous, nombre de leurs propriétés métriques qui ont motivé leur étude par les anciens. Les étudiants qui abordent aujourd'hui leurs études supérieures ne peuvent qu'ignorer ce qui caractérise ces courbes puisqu'elles ne sont plus étudiées dans le secondaire, la réduction progressive de l'enseignement de la géométrie entreprise dans les années 1990-2000 ayant abouti à un désolant strict minimum en 2010, qui se limite à l'étude des droites et plans dans l'espace à 3 dimensions. Aujourd'hui, il serait pourtant très intéressant à l'ère des logiciels de géométrie dynamique, de motiver un jeune public rompu aux technologies numériques, en lui montrant avec quelle facilité on peut étudier et mettre en évidence les propriétés miraculeuses de ces courbes. Ainsi toutes les constructions illustrées dans ce document, ont été permises par l'un d'eux : GEOGEBRA (<http://www.geogebra.org>). Toutes les figures avec leur aspect dynamique offert par GEOGEBRA, sont rangées dans un recueil accessible sur geogebraTube : <https://www.geogebra.org/m/yvmuuvx9>. Les figures imprimées ici sont le résultat d'exportations dans l'un des multiples formats graphiques autorisés par ce logiciel : eps, png, pdf, svg, emf, plus différents langages de dessin à l'intention des utilisateurs de \TeX , \LaTeX : asymptote, tikz, et pstricks, c'est ce dernier langage graphique qui a été utilisé pour exporter toutes les figures de ce document au format pdf. La grande facilité d'utilisation de GEOGEBRA, permet de visualiser de manière interactive toute situation de géométrie classique euclidienne dans l'espace à 3 dimensions, ou sur l'un de ses plans. Lorsqu'on définit simplement les coniques comme courbes algébriques du second degré, les ouvrages plus approfondis et spécialisés tels que [3], montrent que les notions d'espaces affines ou projectifs sans être munis de structure euclidienne, peuvent suffire à les définir et en étudier déjà un nombre important de propriétés. C'est ainsi que je n'ai pu résister à fournir dans le dernier chapitre, ce qui me semble être l'explication du logo de GEOGEBRA : . Il suggère que si cinq points sont tels qu'aucune droite passe par quatre d'entre eux, alors ils définissent une unique conique. La preuve de cette proposition est un simple exercice d'algèbre accessible en lycée, qui ne nécessite aucune notion de géométrie euclidienne. Lorsqu'il y a alignement d'au moins trois points, nous évoquerons l'existence de coniques dégénérées en une ou deux droites, mais il n'y aura plus unicité en cas d'alignement d'au moins quatre points.

Nous avons voulu ici rester fidèles à l'étymologie du mot conique utilisé pour désigner toute courbe obtenue par section plane d'un cône, telle qu'APPOLONIUS de PERGE¹ en avait

1. APOLLONIUS (ou pour certains auteurs), mathématicien grec né à Perga (située aujourd'hui en Turquie

stématisé l'étude au 3^e siècle avant notre ère. Ce point de vue s'appuie donc sur la notion de cône ou cylindre de révolution qui nécessite une structure euclidienne. Aux propriétés purement affines des courbes planes algébriques du second degré déjà nombreuses, s'ajoute ainsi la richesse de leurs propriétés euclidiennes, dont APPOLONIUS en avait déjà énoncé un impressionnant catalogue.

Nous étudierons d'abord l'ellipse en temps que section d'un cylindre ou d'un cône (figures II.1 et II.2), en faisant intervenir ses propriétés métriques d'un point de vue élémentaire, permettant dans un premier temps, d'éviter au maximum l'intervention de calculs de géométrie analytique ou algébrique. Les sections d'un cylindre ne peuvent qu'aboutir à ce premier type de conique non dégénérée, on obtient les autres types de coniques (figures III.1 et IV.1), en faisant varier les angles d'incidence et du cône. Les prédécesseurs d'APPOLONIUS privilégiaient les variations de l'angle du cône, en gardant l'une de ses génératrices perpendiculaire au plan d'incidence, c'est APPOLONIUS qui montra que les variations de l'angle d'incidence entre le plan et l'axe d'un cône quelconque, permettaient d'obtenir tous les types de coniques, tout cela devient très simple à expérimenter aujourd'hui avec GEOGEBRA. Plus de deux millénaires avant l'apparition de nos outils de l'âge du silicium, cela permet de mesurer l'exploit accompli par APPOLONIUS, qui fut un précurseur de la géométrie analytique, sans avoir pu la formaliser à l'aide du symbolisme algébrique moderne apparu seulement à la Renaissance.

Lorsqu'il étudia les propriétés de ces courbes et leur attribua les noms par lesquels on les désigne encore aujourd'hui, il ne disposait pas d'outils apparus beaucoup plus tard dans l'histoire des mathématiques, et ne disposait pas en particulier du calcul différentiel. Nous utiliserons son point de vue géométrique plus élémentaire, qui permet tout de même d'étudier les droites tangentes à une conique, et de comprendre en quoi certaines droites «touchent» de manière particulière ces courbes en faisant remarquer la coïncidence avec le point de vue moderne issu du calcul différentiel. Convenons que la notion de tangente à un cercle nous est familière, bien avant d'avoir abordé le calcul différentiel ; d'une manière plus subtile que pour le cercle, il est possible d'évoquer les tangentes à une conique, à partir de principes de géométrie euclidienne. Avec ce point de vue, un lycéen pourra donc parcourir ce document en ignorant les notions de calcul différentiel, qui demanderaient quelque approfondissement des notions abordées au lycée. Ce point de vue géométrique «naïf» suffit largement pour obtenir une preuve des théorèmes de PONCELET² établis seulement au XIX^e siècle, ce qui nous permettra d'étudier quelques coniques célèbres telles que la parabole de Miquel, les deux ellipses de STEINER³, l'ellipse ou hyperbole d'EULER et l'hyperbole de KIEPERT⁴ dans un triangle.

Ce n'est qu'au dernier chapitre que nous montrerons que les sections coniques et les courbes planes algébriques du second degré sont une même famille⁵, en nous autorisant de plus une initiation à la géométrie du plan projectif, par l'utilisation de coordonnées barycentriques, qui

près d'Antalya), enseigna les mathématiques à Alexandrie au troisième siècle avant notre ère. Il est considéré comme un des plus grands géomètres de l'antiquité, dont la célébrité est due à son traité en 8 volumes sur les sections coniques, dont les 7 premiers ont traversé l'histoire en nous parvenant sous leur forme originale pour les 4 premiers, et dans leurs traductions en arabe pour les trois suivants.

2. Jean-Victor PONCELET né à Metz (1788-1864), polytechnicien spécialiste de géométrie projective.

3. Elles tiennent leur nom du mathématicien suisse Jakob STEINER (1796-1863) qui effectua de nombreux travaux en géométrie.

4. Le mathématicien Ludwig KIEPERT présenta cette hyperbole en 1869 en résolvant le problème de Lemoine : trouver les sommets d'un triangle connaissant les sommets des trois triangles équilatéraux construits à l'extérieur de celui-ci.

5. Résultat connu sous le nom de théorème de Pierre DANDELIN, (mathématicien belge : 1794-1847)

permettent de compléter le plan affine par une droite dite droite à l'infini, constituée de points dont la somme des coordonnées barycentriques est nulle.

C'est pour cette raison, qu'énormément de problèmes de géométrie classique qui peuvent se solutionner par des courbes du second degré, aboutissent à des coniques qui ont chacune un certain degré de célébrité, auxquelles on attache le nom de leur découvreur. Nous étudierons en détails certaines de ces coniques : parabole de MIQUEL d'un quadrilatère complet, hyperbole équilatère de KIEPERT dans un triangle, ellipse et hyperbole d'EULER en lien avec le cercle et la droite du même nom dans un triangle, et les deux ellipses de STEINER circonscrites et inscrites dans un triangle. Nous n'avons fait que prendre quelques exemples, parmi la multitude à laquelle on peut aller à la rencontre sur le site web <http://www.maths-alp.com/home/triangle-et-conique>.

Ce qui a fait au cours de l'histoire des mathématiques le succès de l'étude de ces courbes, n'est pas seulement ce dernier résultat, qui en fait les objets géométriques les plus simples à manipuler après les droites, mais aussi la bonne surprise de les voir resurgir près de deux millénaires plus tard, en apparaissant dans la mécanique NEWTONienne. Nous avons tous entendu parler des lois de KÉPLER et de trajectoire *elliptique* des planètes autour du soleil, de chute *parabolique* des corps. Le principe d'inertie suppose des déplacements rectilignes pour un corps ne subissant aucune influence extérieure, l'introduction d'une force d'attraction entre deux corps selon la modélisation de NEWTON, ne fait qu'introduire les courbes les plus simples à envisager après les droites⁶. C'est pour démontrer ceci, que NEWTON posa les fondements du calcul différentiel, ce détour par des notions de physique classique, pour motiver l'étude des coniques et de leurs propriétés sera notre conclusion.

Cela nécessitera quelques connaissances élémentaires concernant les équations différentielles, la plupart des démonstrations de cette étude sont abordables au niveau bac+1 ou bac+2, mais un niveau bac+1 avec l'aide des annexes présentes en fin d'ouvrage, suffit pour en rendre la majorité accessibles aux étudiants et lycéens motivés. J'encourage donc tout lecteur à installer et utiliser GEOGEBRA sur son ordinateur, sa tablette ou son smartphone pour faire en parallèle à la lecture de ce document, de la géométrie DYNAMIQUE, et être ainsi mieux armé pour consulter les ouvrages plus spécialisés [4], [6] et [3], qui deviennent alors de merveilleux ouvrages de géométrie, quand on peut les accompagner d'illustrations manipulables à loisir sur un écran. Toutes les figures de ce document sont téléchargeables à partir du dossier sur le web à l'URL : <https://www.geogebra.org/m/yvmuuvx9>, elles sont indexées par leurs numéros de légende qui sont aussi répertoriés dans la liste de la page xi.

6. Un corps ou deux isolés de toute influence étant bien sur une chimère physique, Il ne peut s'agir que d'une première approche approximant des théories plus compliquées lorsqu'il faut étudier l'attraction mutuelle de 3 corps et plus, sans parler de l'introduction du temps relativiste.

Table des matières

I	Cylindre et cône de révolution	1
I-1	Cylindre de révolution	1
I-2	Cône de révolution	2
2-1	Définition et propriétés	2
2-2	Sphères inscrites dans un cône	3
I-3	Rapide survol des sections coniques	5
3-1	Angle entre plan et droite dans l'espace	5
3-2	Les 3 types de coniques	6
II	Ellipse	9
II-1	Section d'un cylindre ou d'un cône	9
1-1	Ellipse vue comme section plane d'un cylindre	9
1-2	Ellipse vue comme section plane d'un cône	10
II-2	Propriétés de déduites la définition bifocale	11
2-1	Caractérisation d'une ellipse par ses foyers et son diamètre	11
2-2	Construction d'un cône dont l'ellipse est une section plane	13
2-3	Construction par les cercles directeurs	15
2-4	Droites tangentes à l'ellipse	16
II-3	Équations cartésiennes	18
3-1	Choix du repère	18
3-2	Équations cartésiennes des tangentes et normales	20
II-4	Transformation par affinité	20
4-1	Représentation paramétrique déduite d'une affinité	20
4-2	Cordes conjuguées et théorèmes d'Appolonius	21
4-3	Construction par les cercles de Chasles	24
4-4	Construction par la méthode de la bande de papier	24
II-5	Propriétés des Foyers et directrices	25
5-1	Directrice et excentricité d'une ellipse	25
5-2	Définition par foyer, directrice et excentricité	27
5-3	Équation en coordonnées polaires	29
5-4	Tangentes et directrices	30
II-6	Propriétés des tangentes à une ellipse	31
6-1	Premier théorème de Poncelet	31
6-2	Isogonalité et deuxième théorème de Poncelet	33
6-3	Troisième théorème de Poncelet	33
6-4	Ellipse inscrite ou exinscrite dans un triangle	34

6-5	Cercle orthoptique	35
III	Hyperbole	37
III-1	Hyperbole vue comme section de cône	37
III-2	Définition bifocale de l'hyperbole	38
2-1	Caractérisation d'une hyperbole par ses foyers et la distance entre ses deux branches	38
2-2	Construction d'un cône dont l'hyperbole est une section plane	39
2-3	Construction par les cercles directeurs	40
2-4	Droites tangentes à l'hyperbole	41
III-3	Équation cartésienne d'une hyperbole	43
3-1	Choix du repère	43
3-2	Représentation paramétrique	46
3-3	Équations cartésiennes des tangentes, normales et asymptotes	46
	Droites tangentes à l'hyperbole	46
	Droites asymptotes à l'hyperbole	47
3-4	Équation cartésienne rapportée aux asymptotes	48
	Cordes et asymptotes	49
	Droites conjuguées d'une hyperbole	50
III-4	Propriétés des tangentes à une hyperbole	52
4-1	Les 3 théorèmes de Poncelet	52
4-2	Recherche d'une hyperbole tangente aux trois côtés d'un triangle	55
4-3	Cercle orthoptique	56
III-5	Propriétés des Foyers et directrices	58
5-1	Directrice et excentricité d'une hyperbole	58
5-2	Définition par foyer, directrice et excentricité	59
5-3	Équation en coordonnées polaires	61
5-4	Tangentes et directrices	63
IV	Parabole	65
IV-1	Parabole vue comme section conique particulière	65
1-1	Section du cône	65
1-2	Définition et construction par foyer et directrice	66
IV-2	Équations d'une parabole de ses tangentes et normales	67
2-1	Choix du repère	67
2-2	Équations cartésiennes des tangentes et normales	68
2-3	Équation en coordonnées polaires	69
2-4	Construction d'un cône dont la parabole est une section plane	71
IV-3	Propriétés des tangentes à une parabole	72
3-1	Construction à la règle et au compas	72
3-2	Trois théorèmes de Poncelet	73
3-3	Lieu du milieu des cordes de même direction qu'une tangente	75
3-4	Recherche d'une parabole tangente aux côtés d'un triangle	76

V	Coniques en général et étude de quelques coniques célèbres	79
V-1	Courbes algébriques planes du second degré	79
1-1	Équation cartésienne $ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey + f = 0$ en repère quelconque	79
1-2	Courbes d'équation cartésienne $ax^2 + by^2 + cx + dy + e = 0$ en repère orthonormé.	80
1-3	Conique passant par 5 points	82
1-4	Selon son équation cartésienne, quel type de conique obtient-on? . . .	84
V-2	Équation en coordonnées polaires	86
V-3	Équation en coordonnées barycentriques	86
3-1	Introduction de points à l'infini	86
3-2	Conique circonscrite à un triangle	88
3-3	Théorème de Pascal	89
V-4	Cône passant par tous les points d'une conique	94
4-1	Théorème de Dandelin	94
4-2	Lieu du sommet d'un cône passant par une conique	99
	Cas de l'ellipse	99
	Cas de l'hyperbole	101
	Cas de la parabole	102
V-5	Coniques et isogonalité	104
5-1	Relation d'isogonalité entre paires de droites	104
5-2	Points conjugués isogonaux relativement à un triangle	105
5-3	Définition dans un plan projectif de la conjugaison isogonale	106
	Conjugué isogonal d'un point qui n'est pas sur le cercle circonscrit . .	108
	Conjugué isogonal d'un point sur le cercle circonscrit	109
5-4	Image par conjugaison isogonale d'une droite est une conique	112
V-6	Conique tangente aux trois côtés d'un triangle	115
6-1	Conique tangente aux trois côtés d'un triangle avec un foyer fixé . . .	115
6-2	Conique tangente aux côtés d'un triangle en deux points fixés	119
6-3	La Conique tangente aux côtés d'un triangle avec un centre fixé	126
V-7	Quelques coniques célèbres	129
7-1	La parabole de Miquel d'un quadrilatère	129
7-2	Ellipse et hyperbole d'Euler	131
7-3	Ellipses de Steiner d'un triangle	132
	Ellipse inscrite	132
	Ellipse circonscrite	133
7-4	Hyperbole de Kiepert dans un triangle	137
V-8	Trajectoire selon une conique en mécanique classique	142
A	Distinction entre angles de vecteurs et angles de droites	145
A-1	Rotation et angle de 2 vecteurs	145
A-2	Angles de deux droites	149
A-3	Conditions pour que 4 points soient cocycliques.	151
A-4	Droite de Simson et Steiner dans un triangle	153
4-1	Théorème de Simson	153
4-2	Droite de Steiner	155

A-5	Axe radical de de deux cercles coplanaires	156
5-1	Puissance d'un point par rapport à un cercle	156
5-2	Définition de l'axe radical	157
5-3	Théorème de Monge	157
5-4	Théorème de Jacobi	158
B Coordonnées barycentriques et initiation à la géométrie dans un plan projectif		163
B-1	Barycentre	163
1-1	Somme des coefficients non nulle	163
1-2	Somme des coefficients nulle	164
B-2	Construction du plan projectif	164
2-1	Points d'un plan assimilés à des droites d'un espace à 3 dimensions . .	164
2-2	Coordonnées barycentriques d'un milieu	167
2-3	Équation de droite dans un plan projectif	168
B-3	Interprétation des coordonnées barycentriques	170
3-1	Associativité de la construction du barycentre	170
3-2	Coordonnées barycentriques exprimées par des aires	170
3-3	Coordonnées barycentriques et produit mixte	172
B-4	Théorème de Céva	174
4-1	Condition générale de concours de 3 droites	174
4-2	Condition de concours de 3 céviennes dans un triangle	175

Table des figures

I.1	Cylindre d'équation $x^2 + y^2 = r^2$ avec z prolongeable à l'infini.	1
I.2	Cône d'équation $x^2 + y^2 = \left(\frac{rz}{b}\right)^2$ avec z prolongeable à l'infini.	3
I.3	Sphère tangente à un cône	4
I.4	La mesure α de l'angle entre le plan (AEC) et la droite (AB) est la mesure de l'angle aigu entre la cette droite et sa projection orthogonale sur le plan.	5
I.5	Ellipse obtenue par section plane d'un cône lorsque $\beta > \alpha$	6
I.6	Deux branches d'hyperbole obtenues par section plane d'un cône lorsque $\beta < \alpha$	7
I.7	Parabole obtenue par section plane d'un cône lorsque $\alpha = \beta$	8
II.1	Ellipse obtenue par section plane d'un cylindre.	9
II.2	Ellipse obtenue par section plane d'un cône ($\alpha < \beta$).	11
II.3	Construction d'un cône dont la trace dans le plan Π est l'ellipse.	14
II.4	Un plan sur lequel l'ellipse se projette orthogonalement en un cercle.	15
II.5	Ellipse construite à partir du foyer F_2 et du cercle directeur de centre F_1 et rayon $d > F_1F_2$	16
II.6	Points et cercles remarquables d'une l'ellipse.	18
II.7	Lieu du milieu des cordes d'une ellipse dirigées par \vec{u}	22
II.8	Illustration des théorèmes d'Appolonius.	23
II.9	Cercles de Chasles de rayons $a + b$ et $a - b$	25
II.10	Construction de l'ellipse par la méthode de la bande de papier	26
II.11	Droites directrices d'une l'ellipse.	27
II.12	Ellipse définie par le foyer F_1 , la directrice d_1 et l'excentricité $e = \frac{3}{4}$	28
II.13	Ellipse de foyer F_1 , directrice d_1 d'excentricité $e = \frac{1}{2}$ et paramètre $p = 3$	29
II.14	Tangentes à une ellipse en les extrémités d'une corde passant par un foyer	31
II.15	Illustration des 3 théorèmes de Poncelet dans le cas d'une ellipse.	32
II.16	Ellipse inscrite dans ABC lorsque F_1 est à l'intérieur du triangle.	34
II.17	Cercle orthoptique d'une ellipse	36
III.1	hyperbole obtenue par section plane d'un cône ($\alpha > \beta$).	38
III.2	Construction d'un cône dont la trace dans le plan Π est l'hyperbole.	39
III.3	1 ^e branche d'une hyperbole \mathcal{H} , ensemble des points M tels que $MF_2 - MF_1 = d$	41
III.4	2 ^e branche d'une hyperbole \mathcal{H} , ensemble des points M tels que $MF_2 - MF_1 = -d$	42
III.5	Construction des tangentes à une hyperbole	42
III.6	Points, cercles et droites remarquables d'une hyperbole.	44
III.7	Triangle aux côtés supportés par les asymptotes et une tangente à l'hyperbole.	48

III.8	Lieu du milieu des cordes parallèles entre elles, reliant 2 points sur des branches distinctes d'une hyperbole.	50
III.9	Lieu du milieu des cordes parallèles entre elles, reliant 2 points sur la même branche.	51
III.10	Illustration des 3 théorèmes de Poncelet avec points de contact sur la même branche.	52
III.11	Illustration des 3 théorèmes de Poncelet avec points de contact sur des branches distinctes.	53
III.12	Construction d'une l'hyperbole tangente aux trois côtés d'un triangle.	55
III.13	Le côté $[AB]$ est sur la médiatrice de $[F_1C']$ qui est donc asymptote de l'hyperbole tangente aux 2 autres côtés du triangle en T_1 et T_2	56
III.14	Point P sur deux droites perpendiculaires, tangentes à la même branche de l'hyperbole.	57
III.15	Point P sur deux droites perpendiculaires, tangentes à des branches distinctes.	58
III.16	Hyperbole de foyer F directrice (KH) et excentricité $e = 2$	60
III.17	M parcourt la branche d'hyperbole à gauche, lorsque $\theta \in]-\pi + \text{Acos}\frac{1}{e}; \pi - \text{Acos}\frac{1}{e}[$	61
III.18	M parcourt la branche d'hyperbole à droite, lorsque $\theta \in]\pi - \text{Acos}\frac{1}{e}; \pi + \text{Acos}\frac{1}{e}[$	62
III.19	Les tangentes à une hyperbole en des points M et M' alignés avec le foyer F , ont leur intersection I est située sur la directrice associée à ce foyer F , ce point I se projette orthogonalement en F sur (MM') . Si M et M' sont sur une même branche de l'hyperbole, alors I est le centre d'un cercle exinscrit du triangle $MM'F'$	63
III.20	Les tangentes à une hyperbole en des points M et M' alignés avec le foyer F , ont leur intersection I située sur la directrice associée à ce foyer F , ce point I se projette orthogonalement en F sur (MM') . Si M et M' sont sur chacune des deux branches de l'hyperbole, alors I est le centre du cercle inscrit dans le triangle $MM'F'$	64
IV.1	parabole obtenue par section plane d'un cône.	65
IV.2	Parabole construite à partir du foyer F et de la directrice $\mathcal{D} = (F'H)$	67
IV.3	Parabole d'équation cartésienne $y = 2px^2$	68
IV.4	Tangentes à une parabole issues d'un point sur la directrice	70
IV.5	Construction d'un cône dont la trace dans le plan Π est la parabole.	72
IV.6	Illustration des théorèmes de Poncelet pour une parabole.	74
IV.7	Lieu du milieu des cordes dirigées par le même vecteur \vec{u}	75
IV.8	Construction d'une parabole tangente aux 3 côtés du triangle ABC , avec foyer F sur le cercle circonscrit à ABC	76
V.1	Première illustration du théorème de Pascal.	90
V.2	Deuxième illustration du théorème de Pascal.	91
V.3	Illustration du théorème de Pappus	92
V.4	Construction de la conique passant par 5 points, en faisant varier l'angle θ dans $[0; 2\pi[$	93
V.5	Un hexagone dont les côtés opposés sont parallèles est inscriptible dans une conique.	94
V.6	Construction à la règle seule de la tangente à une conique \mathcal{C} en un point $A \in \mathcal{C}$	95
V.7	Le plan \mathcal{P} coupe le cône selon une conique de foyer F et directrice $\mathcal{D} = \mathcal{P} \cap \mathcal{Q}$	96
V.8	Si X n'est pas sur le cercle de centre O passant par U , alors $\pi_{\mathcal{S}}(U) \neq \pi_{\mathcal{S}}(X)$	98
V.9	Ellipse dans le plan \mathcal{P} et son hyperbole focale dans le plan $\Pi \perp \mathcal{P}$	100
V.10	Hyperbole dans le plan \mathcal{P} et son ellipse focale.	102
V.11	Deux paraboles focales l'une de l'autre dans deux plans perpendiculaires.	103

V.12 Paires de droites $\{d_1; d_2\}$ et $\{d_3; d_4\}$ isogonales. 104

V.13 M et M' Conjugués isogonaux par rapport à ABC 105

V.14 Isogonales de (F_1A) , (F_1B) et (F_1C) concourantes en F_2 lorsque F_1 n'est pas sur le cercle circonscrit à ABC 107

V.15 Conjugaison isogonale de points sur le cercle circonscrit au triangle ABC 110

V.16 Images de trois droites par conjugaison isogonale par rapport à ABC 113

V.17 Droites isogonales de (F_1A) , (F_1B) et (F_1C) parallèles lorsque F_1 est sur le cercle circonscrit à ABC 116

V.18 Si F_1 à l'intérieur de ABC son isogonal F_2 est aussi à l'intérieur de ABC 117

V.19 Si $F_1 \in \mathcal{S}_C(\widehat{BCA})$, F_2 est à l'intérieur de \mathcal{C} et à l'extérieur du triangle. 118

V.20 Si F_1 est dans \widehat{CAB} à l'extérieur de \mathcal{C} , son isogonal F_2 est dans la même région. 119

V.21 Ellipse exinscrite dans ABC avec foyers isogonaux hors du domaine colorié en bleu. . 120

V.22 Construction de l'unique ellipse tangente aux droites supportant les côtés d'un triangle ABC en des points $A' \in (BC)$ et $B' \in (CA)$ fixés à l'avance 122

V.23 Construction de l'unique hyperbole tangente aux droites supportant les côtés d'un triangle ABC en des points $A' \in (BC)$ et $B' \in (CA)$ fixés à l'avance. 123

V.24 Recherche d'une conique de centre O passant par A' , B' et C' 124

V.25 Construction de l'unique parabole passant par $A' \in (BC)$ fixé à l'avance, qui est de plus tangente aux trois droites supportant les côtés d'un triangle ABC ,. 126

V.26 Construction de la conique tangente aux côtés du triangle ABC admettant un point O quelconque pour centre. 128

V.27 Point de Miquel M dont les projetés orthogonaux sur quatre droites sont alignés. 129

V.28 Construction de la parabole de Miquel 130

V.29 Ellipse d'Euler dans un triangle 132

V.30 Hyperbole d'Euler dans un triangle 133

V.31 Ellipses de Steiner circonscrite et inscrite dans le triangle ABC 134

V.32 Projection de l'ellipse inscrite dans ABC , en le cercle inscrit dans XYZ 135

V.33 Lorsque les 3 triangles isocèles de couleurs sont semblables, (AA') , (BB') et (CC') sont concourantes. 138

V.34 Hyperbole de Kiepert du triangle ABC 140

A.1 Symétrie de matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}$ dans la base orthonormée (\vec{i}, \vec{j}) . L'axe de symétrie est dirigé par $\vec{AC} = b\vec{i} + (1 - a)\vec{j}$ 146

A.2 Orientation du plan 147

A.3 Illustration du théorème de l'angle inscrit 152

A.4 Propriétés des projetés orthogonaux d'un point sur les côtés d'un triangle. . . 154

A.5 Droite de Simson et Steiner dans un triangle 155

A.6 Illustration du théorème de Monge avec des axes radicaux concourants ou parallèles. 158

A.7 Sont représentés de la même couleur les angles de droites de même mesure obtenus à l'aide du théorème 25. 159

A.8 Axes radicaux des cercles \mathcal{C}_1 , \mathcal{C}_2 et \mathcal{C}_3 définis à l'aide des angles α , β et γ . . . 160

B.1 Les coordonnées cartésiennes de M' dans $(O, \vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ sont des coordonnées barycentriques de M dans (A, B, C) 164

B.2 Coordonnées barycentriques de M à l'intérieur du triangle ABC 170

B.3	Coordonnées barycentriques de M à l'extérieur du triangle ABC	172
B.4	Coordonnées barycentriques de M à l'extérieur du triangle ABC	173
B.5	Théorème de Céva	176

Toutes ces figures sont téléchargeables à partir du dossier sur le web à l'URL :
<https://www.geogebra.org/m/yvmuuvx9>.

Chapitre I

Cylindre et cône de révolution

I-1 Définition et propriétés d'un cylindre

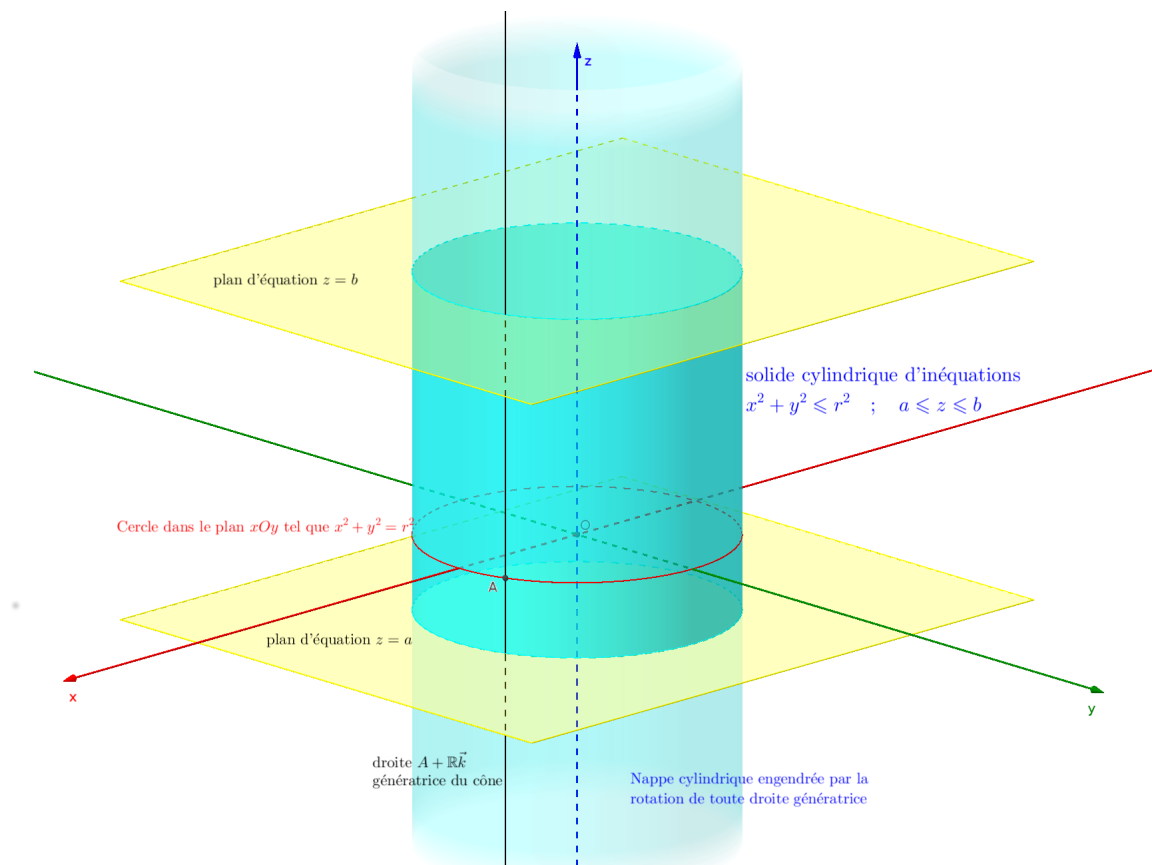


FIGURE I.1 – Cylindre d'équation $x^2 + y^2 = r^2$ avec z prolongeable à l'infini.

En géométrie, il existe une définition générale (voir [4]) d'un cylindre qui n'est pas celle adoptée ici, pour ce document qui se veut plus élémentaire. Tous les cylindres évoqués par la suite seront supposés droits et de révolution ; cela signifie qu'il s'agit de tous les points de la surface, ou nappe engendrée par le déplacement d'une droite parallèlement à elle-même, dont l'un des points parcourt un cercle tracé dans un plan perpendiculaire à cette droite. Tous nos cylindres obéiront donc à la définition suivante.

DÉFINITION 1 Une surface de l'espace euclidien de dimension 3 sera appelée cylindre s'il existe un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ k dans lequel cette surface admet une équation de la forme :

$$x^2 + y^2 = r^2$$

Le nombre réel r est le rayon du cylindre, le 3^e axe du repère est appelé axe du cylindre.

Le fait qu'on puisse trouver un repère *orthonormé* pour exprimer l'équation, permet de dire que le cylindre est droit, puis qu'il est de révolution, car son équation restreinte au plan de repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ est celle d'un cercle de rayon r , parcouru par un point d'une droite de même direction que l'axe, dont la révolution engendre le cylindre. La notion plus générale de cylindre s'abstrait du fait que le repère soit orthonormé, auquel cas le cylindre n'est plus nécessairement droit mais peut être oblique, et l'équation restreinte au plan de repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ pourrait être celle d'une courbe C^1 quelconque.

La propriété essentielle d'un cylindre est qu'on peut en exprimer une équation indépendante de la troisième coordonnée z , toute droite de la forme $M + R\vec{k}$, dirigée par \vec{k} et passant par un n'importe quel point M du cylindre est incluse dans ce même cylindre, cette droite est appelée une génératrice du cylindre. Le cylindre est dit de révolution, car on peut le concevoir comme une nappe décrite par la révolution de toute droite génératrice autour de l'axe. Notre définition suppose que ce cylindre est non borné, car sa 3^e coordonnée est supposée parcourir tout l'ensemble \mathbb{R} . Toute intersection avec un plan d'équation $z = a$ est donc un cercle de rayon r quelque soit le réel a , alors que généralement dans la définition d'un solide cylindrique, on ne retient que les points compris entre des plans d'équation $z = a$ et $z = b$. Un tel solide limité par 2 disques de bases circulaires est l'ensemble des points qui vérifient les inéquations : $a \leq z \leq b$ et $x^2 + y^2 \leq r^2$. Dans le paragraphe suivant nous envisagerons l'intersection d'un cylindre avec un plan quelconque. Pour ne pas nous soucier d'éventuelles bornes dans l'étude du résultat obtenu, tous les cylindres envisagés par la suite seront donc selon la définition adoptée, des surfaces prolongeables à l'infini sans disques de base.

I-2 Cône de révolution

2-1 Définition et propriétés

Comme pour le cylindre, en géométrie, il existe une définition très générale d'un cône (voir [4]) qui n'est pas celle adoptée ici ; dans ce document qui étudie les courbes appelées coniques, on se restreint au cas des cônes de révolution droits. Cela signifie qu'il s'agit d'une surface ou nappe engendrée par le déplacement d'une droite ayant un point fixe appelé sommet du cône, et dont l'un des points parcourt un cercle tracé dans un plan, tel que le projeté orthogonal du sommet sur ce plan soit centre de ce cercle, tous nos cônes obéiront donc à la définition suivante.

DÉFINITION 2 Une surface de l'espace euclidien de dimension 3, sera appelée cône s'il existe un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ k et un nombre $a \in \mathbb{R}$, tels que dans ce repère cette surface admette une équation de la forme :

$$x^2 + y^2 = (az)^2$$

Le 3^e axe du repère est appelé axe du cône sur lequel se trouve le sommet O pris pour origine du repère. Tout plan d'équation $z = b$, orthogonal à l'axe du cône a pour intersection avec celui ci, un cercle centré sur l'axe et rayon $r = |ab|$. Si $\alpha \in [0; \frac{\pi}{2}]$ est la mesure de l'angle de

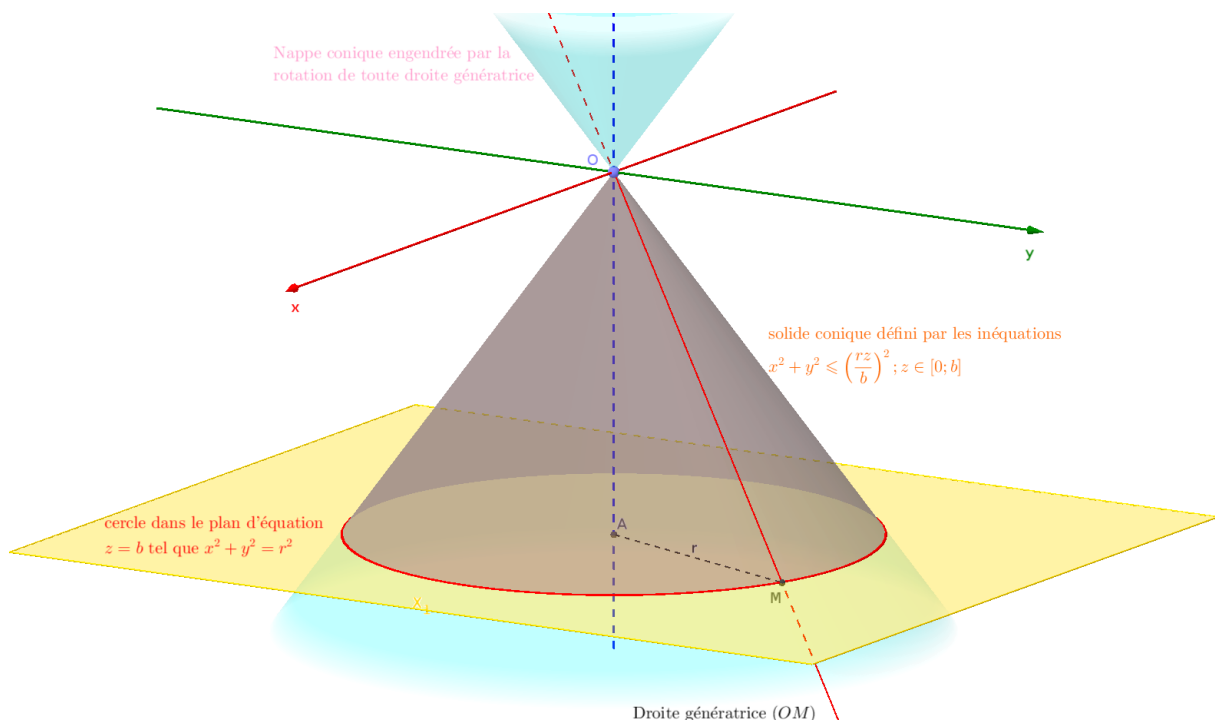


FIGURE I.2 – Cône d'équation $x^2 + y^2 = \left(\frac{rz}{b}\right)^2$ avec z prolongeable à l'infini.

droites entre l'axe du cône et une de ses génératrices, étant donné un point A de coordonnées $(0; 0; b)$, on a $\tan \alpha = \frac{r}{OA} = \frac{|ab|}{|b|} = |a|$, cet angle géométrique α déterminé par a , caractérise à une isométrie près le cône, on l'appelle demi-angle du cône.

Comme pour les cylindres, pour ne pas nous soucier d'éventuelles bornes dans l'étude des intersections obtenues avec un plan quelconque, tous les cônes envisagés par la suite seront selon la définition adoptée, des surfaces prolongeables à l'infini sans disque de base dans un plan d'équation $z = b$, comme sur la figure I.2. Une propriété essentielle d'un cône \mathcal{C} de sommet O , est que pour tout point $M(x, y, z)$ de \mathcal{C} , son image $M'(\lambda x, \lambda y, \lambda z)$ par toute homothétie de centre O , quelque soit son rapport $\lambda \neq 0$, appartient aussi à \mathcal{C} , car l'équation $(\lambda x)^2 + (\lambda y)^2 = (a\lambda z)^2$ est équivalente à $x^2 + y^2 = (az)^2$. Étant donné que λ peut parcourir tout l'ensemble des nombres réels, notre cône ainsi défini est constitué de deux nappes symétriques par rapport au sommet O .

2-2 Sphères inscrites dans un cône

Nous désignerons ainsi des sphères centrées sur l'axe du cône, telle qu'une génératrice de ce cône soit tangente à la sphère, toutes les génératrices sont alors tangentes à la sphère, en des points situés dans un plan perpendiculaire à l'axe du cône. On montre en effet que l'ensemble des points de contacts entre la sphère et le cône est un cercle de même axe que le cône, car si une sphère \mathcal{S} centrée en un point O situé sur l'axe du cône, est tangente à une génératrice de ce cône en un point A , alors SOA est un triangle rectangle en A . Considérons alors le cercle obtenu par intersection du cône avec le plan passant par A perpendiculaire à son axe, soient C son centre et r son rayon. Toute autre génératrice du cône intercepte donc

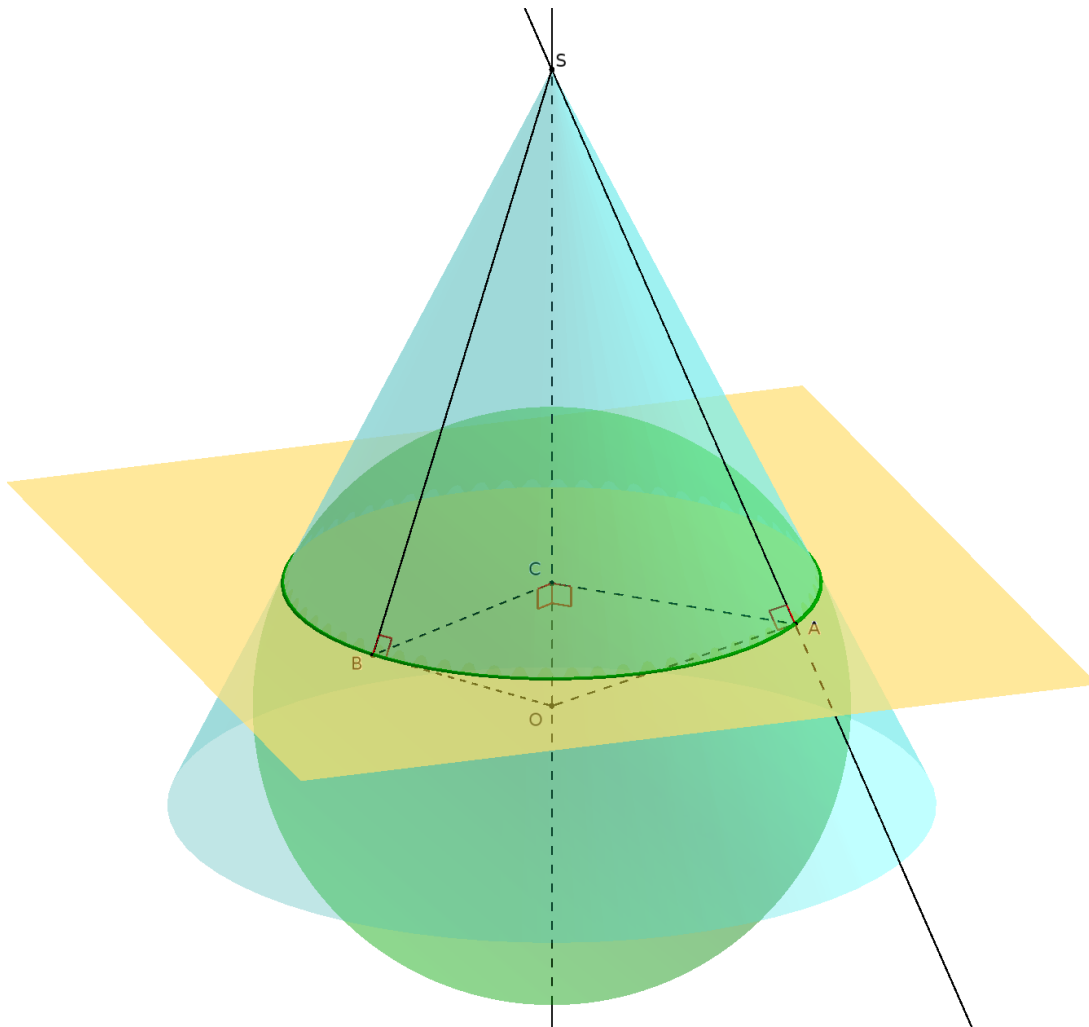


FIGURE I.3 – Sphère tangente à un cône

ce cercle en un point B , qui appartient lui aussi à la sphère \mathcal{S} car $OA = OB = \sqrt{CO^2 + r^2}$. On a de plus $SA = SB = \sqrt{CS^2 + r^2}$, les triangles SOA et SOB sont donc deux triangles rectangles isométriques, ce qui montre que toute autre génératrice du cône telle que (SB) est tangente à la sphère car on a prouvé $B \in \mathcal{S}$ et $(SB) \perp (OB)$.

Les propriétés métriques des coniques dites non dégénérées que nous allons étudier dans les prochains chapitres et qui permettent de les ranger en trois familles principales, reposent sur le lemme élémentaire suivant que nous appliquerons à des sphères inscrites dans un cône ou un cylindre

LEMME 1 *Étant donné une sphère \mathcal{S} et un point S fixé à l'extérieur de cette sphère, tous les segments dont les extrémités sont le point S et un point A de la sphère tel que la droite (SA) soit tangente à la sphère sont de même longueur.*

Il suffit d'appliquer le théorème de Pythagore pour calculer $SA^2 = SO^2 - r^2$ où O est le centre de la sphère et r son rayon, on retrouve ainsi le cône de sommet S de la figure I.3, dans lequel est inscrite la sphère.

I-3 Rapide survol des sections coniques

3-1 Angle entre plan et droite dans l'espace

Pour préciser les différents cas à considérer lorsque nous étudierons l'intersection d'un cône ou d'un cylindre avec un plan, nous avons besoin de préciser la notion d'angle entre un plan et une droite qui lui est sécante. Le cas le plus simple est celui où une droite d est perpendiculaire à un plan \mathcal{P} en un point A , toute droite du plan passant par A est alors perpendiculaire à la droite d . Dans ce cas là, quels soient les points B et C tels que $B \in d \setminus \{A\}$ et $C \in \mathcal{P} \setminus \{A\}$, l'angle \widehat{BAC} a pour mesure $\frac{\pi}{2}$, nous dirons que l'angle entre la droite et le plan est un angle droit de mesure $\frac{\pi}{2}$.

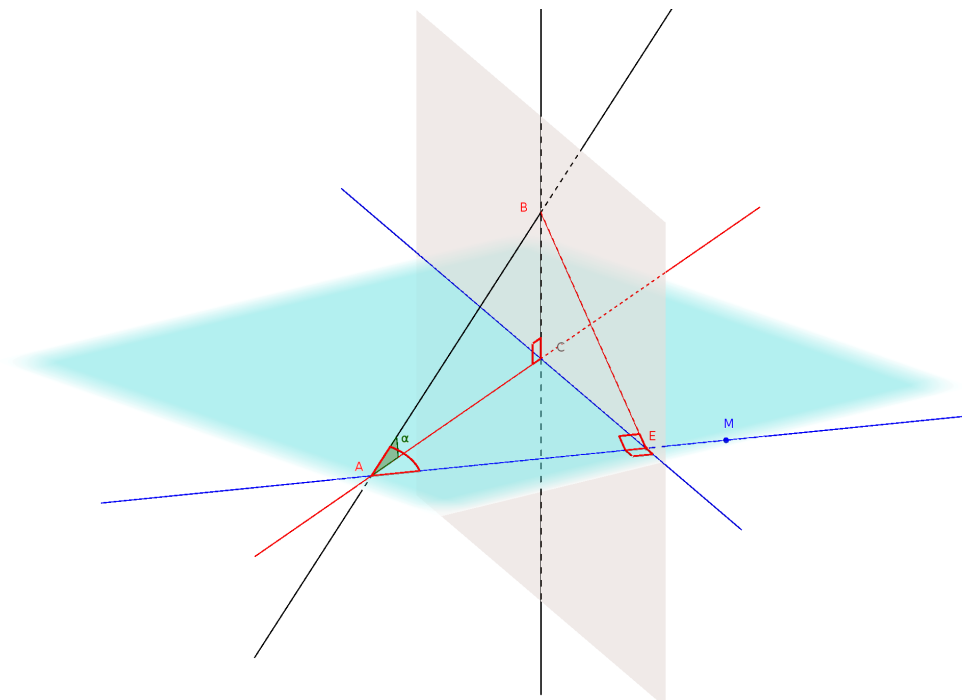


FIGURE I.4 – La mesure α de l'angle entre le plan (AEC) et la droite (AB) est la mesure de l'angle aigu entre cette droite et sa projection orthogonale sur le plan.

Si la droite d sécante en A au plan \mathcal{P} n'est pas perpendiculaire à celui-ci, le projeté orthogonal de $B \in d \setminus \{A\}$ sur \mathcal{P} est un point C différent de A , tel que la mesure de l'angle \widehat{BAC} soit celle d'un angle aigu comprise dans l'intervalle $]0; \frac{\pi}{2}[$. C'est la mesure minimum que puisse avoir un angle géométrique \widehat{BAM} lorsque $B \in d \setminus \{A\}$ et $M \in \mathcal{P} \setminus \{A\}$, en effet si $M \in \mathcal{P} \setminus \{(AC)\}$, considérons le plan perpendiculaire à la droite (AM) passant par C , celui-ci coupe la droite (AM) en un point E nécessairement différent de C tel que :

$$\sin \widehat{BAM} = \sin \widehat{BAE} = \frac{BE}{BA} = \frac{\sqrt{BC^2 + CE^2}}{BA} > \frac{BC}{BA} = \sin \widehat{BAC}$$

On en déduit que \widehat{BAC} a nécessairement une mesure inférieure à celle de \widehat{BAM} , c'est cet angle aigu de mesure minimum entre d et une autre droite du plan, \mathcal{P} , que nous désignerons comme l'angle entre un plan et une droite qui lui est sécante.

3-2 Les 3 types de coniques non dégénérées et quelques cas particuliers

Dans les trois figures ci-dessous, par projection orthogonale de l'axe du cône en rouge sur le plan sectionnant le cône, on obtient la droite en vert. Ces deux droites définissent un plan perpendiculaire au plan de section, c'est dans ce plan qu'on évalue la mesure β de l'angle aigu entre l'axe du cône et le plan. En faisant varier cet angle d'incidence entre le plan et l'axe du cône, nous allons faire un premier survol rapide des caractéristiques des différentes courbes obtenues, qui seront étudiées en détails dans les chapitres suivants.

- **1^{er} cas** : $\beta > \alpha$

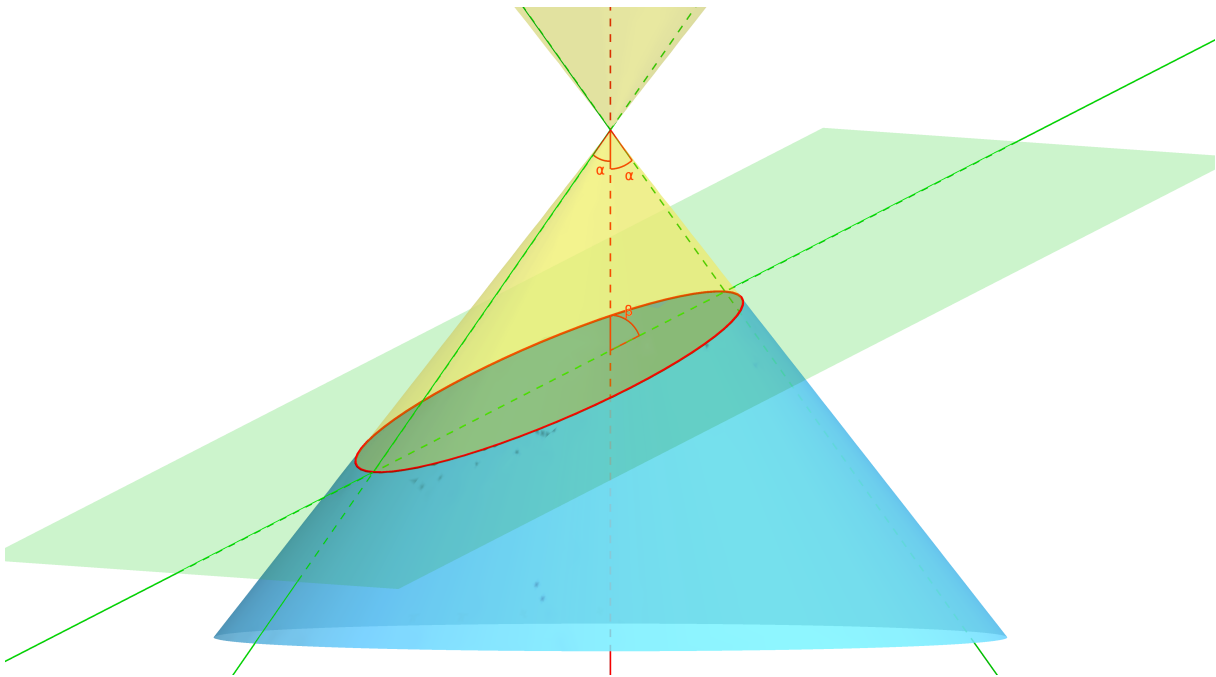


FIGURE I.5 – Ellipse obtenue par section plane d'un cône lorsque $\beta > \alpha$

Lorsqu'un plan coupe un cône de manière que l'angle entre l'axe du cône et ce plan soit strictement supérieur à l'angle entre l'axe du cône et ses génératrices, le plan intercepte une seule nappe parmi les deux nappes symétriques qui constituent le cône complet. Ce cas de figure sera étudié plus rigoureusement en II.2, la courbe obtenue par intersection du cône et du plan sera une ellipse, c'est le seul type de conique qui soit bornée, on verra aussi qu'on obtient ce même type de courbe par section d'un cylindre (voir figure II.1). Si l'angle β a une mesure égale à $\frac{\pi}{2}$, on obtient évidemment un cercle comme cas particulier de l'ellipse (voir figure I.2), lorsque le plan passe par le sommet du cône, ce cercle est réduit à ce seul point.

- **2^{er} cas** : $\beta < \alpha$

Lorsqu'un plan coupe un cône de manière que l'angle entre l'axe du cône et ce plan soit strictement inférieur à l'angle entre l'axe du cône et ses génératrices, le plan intercepte les deux nappes symétriques par rapport au sommet qui constituent le cône complet, on obtient donc deux branches d'une courbe appelée hyperbole. Ce cas de figure avec deux

branches sera étudié plus rigoureusement et en détails en III.1.

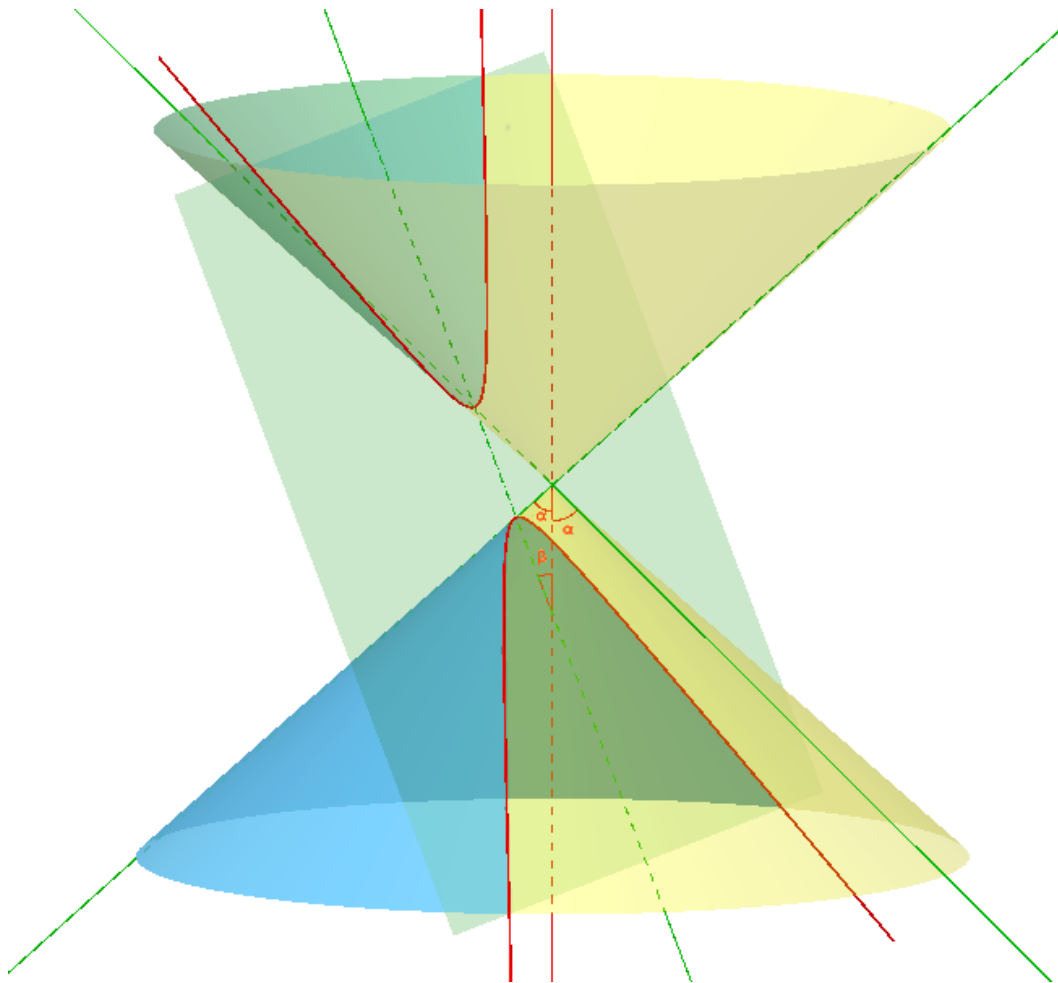


FIGURE I.6 – Deux branches d’hyperbole obtenues par section plane d’un cône lorsque $\beta < \alpha$

Si le plan de section passe par le sommet du cône, on obtient deux droites sécantes au sommet du cône qui peuvent s’interpréter comme une hyperbole dégénérée.

- 3^e cas : $\beta = \alpha$

Lorsqu’un plan coupe un cône de manière que l’angle entre l’axe du cône et ce plan soit égal à l’angle entre l’axe du cône et ses génératrices, le plan intercepte une seule nappe parmi les deux nappes symétriques qui constituent le cône complet, mais contrairement au cas de l’ellipse on obtient une courbe qui présente des branches infinies, la courbe obtenue sera une parabole, c’est le cas de figure que nous étudierons plus rigoureusement en IV.1. Si le plan de section passe par le sommet du cône, on obtient une droite génératrice du cône qui peut s’interpréter comme une parabole dégénérée.

À partir des observations géométriques qui précèdent il apparaît immédiatement un critère permettant de distinguer le type de courbe rencontré, à partir du nombre de ses branches infinies :

- une ellipse est bornée et n’admet pas de branches infinies,
- une hyperbole admet 4 branches infinies,
- une parabole admet seulement deux branches infinies.

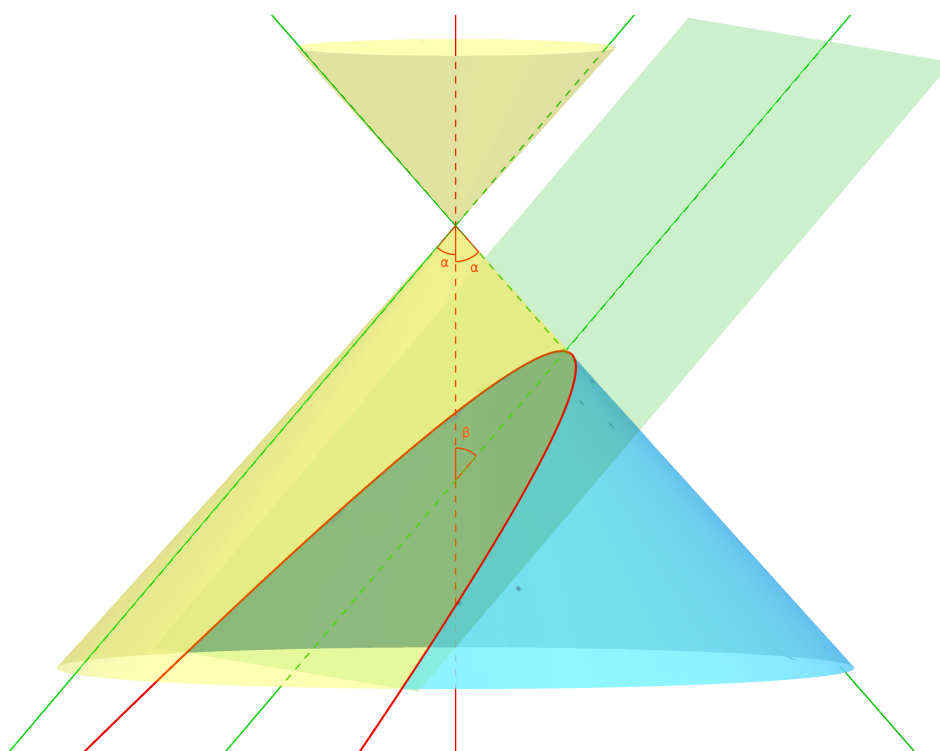


FIGURE I.7 – Parabole obtenue par section plane d'un cône lorsque $\alpha = \beta$

Ces trois types de courbe forment la famille des coniques dites non dégénérées, qui ont pour propriété de ne pas pouvoir contenir 3 points alignés, car une droite qui n'est pas une génératrice du cône, ne peut intercepter celui-ci qu'en deux points, au plus. Les coniques réduites à un point, une droite ou bien à la réunion de deux droites sécantes ou parallèles seront dites dégénérées. Cela n'est qu'un aperçu des critères qui seront établis plus rigoureusement par la suite, pour discuter de la nature des coniques que nous rencontrerons.

Dans les trois chapitres suivants, nous définirons d'abord rigoureusement de manière algébrique ce qu'est une ellipse, une hyperbole ou une parabole, en s'appuyant sur l'observation des propriétés géométriques des différentes sections coniques que nous venons de survoler. Ce n'est qu'au dernier chapitre que nous verrons que les coniques dites non dégénérées : ellipses, hyperboles et paraboles, décrivent de manière exhaustive toutes les courbes que l'on peut qualifier d'algébriques planes du second degré, à condition d'exclure les cas qui par simplification ou factorisation, se ramènent à des calculs algébriques du premier degré, et aboutissent à des coniques dites dégénérées.

La boucle sera bouclée au dernier chapitre par le théorème de Dandelin, qui montre que ces définitions algébriques définissent des ensembles de points, qui peuvent tous être réalisés comme intersection d'un cône ou cylindre et d'un plan, ce qui justifie le nom de coniques attribué à ces courbes.

Chapitre II

Ellipse

II-1 Section d'un cylindre ou d'un cône

1-1 Ellipse vue comme section plane d'un cylindre

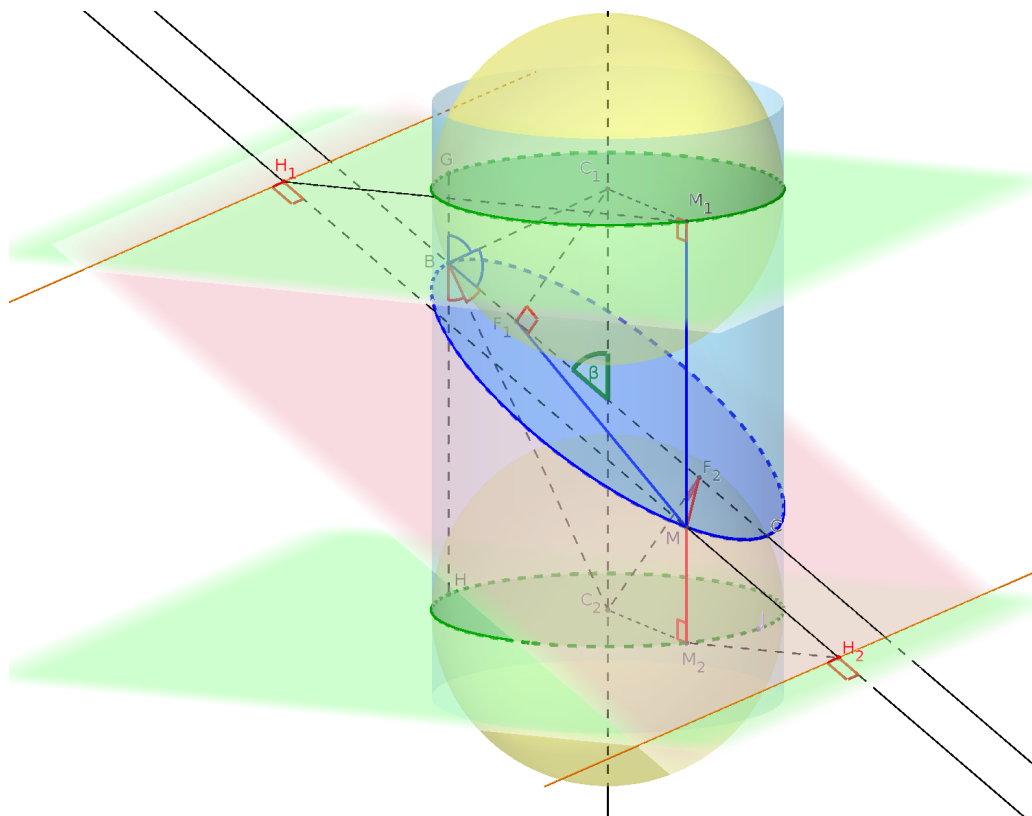


FIGURE II.1 – Ellipse obtenue par section plane d'un cylindre.

Étant donné le cylindre \mathcal{C} de rayon r , on voudrait étudier les propriétés de l'intersection avec un plan Π , si le plan est perpendiculaire à l'axe du cylindre, on sait que la courbe obtenue est un cercle de même rayon que le cylindre. Si le plan est parallèle à l'axe, on peut obtenir une droite, deux droites ou aucun point d'intersection selon la distance entre l'axe et le plan. Le cas le plus général est illustré par la figure II.1.

Les sphères de même rayon r que le cylindre \mathcal{C} ont été inscrites dans le cylindre, de manière à être tangentes au plan Π . On peut déterminer les deux points de contacts F_1 et F_2 en plaçant les centres des sphères sur l'axe de \mathcal{C} à l'intersection avec deux plans parallèles à Π situés à distance r de celui-ci. Nous sommes assurés que de telles sphères sont tangentes au plan Π , car leurs centres sont situés à une distance de Π égale à leur rayon, elles ne peuvent donc avoir qu'un seul point commun avec le plan. Toutes les droites du plan Π passant par F_1 ou F_2 sont donc tangentes aux deux sphères, De même, toutes les droites génératrices du cylindre sont aussi à distance r du centre de chacune des sphères, et sont par conséquent elles aussi tangentes aux deux sphères.

Désignons par M le point d'intersection de Π et d'une génératrice du cylindre, puis par M_1 et M_2 les points de contact entre cette génératrice et les deux sphères, L'application du lemme 1 des segments tangents à une sphère permet d'établir les égalités suivantes :

$$MF_1 = MM_1 \text{ et } MF_2 = MM_2 \implies MF_1 + MF_2 = MM_1 + MM_2 = M_1M_2$$

Les points M_1 et M_2 sont situés chacun dans des plans perpendiculaires à l'axe du cylindre passant par les centres des sphères, la distance M_1M_2 est donc une constante h égale à la distance C_1C_2 entre les centres des deux sphères. M décrit donc une courbe plane telle que $MF_1 + MF_2 = h$.

1-2 Ellipse vue comme section plane d'un cône

Étant donné le cône \mathcal{C} de sommet S , on voudrait étudier les propriétés de l'intersection avec un plan Π . Si le plan est perpendiculaire à l'axe du cône, on sait que la courbe obtenue est un cercle qui contrairement à ce que l'on observe pour un cylindre, est de rayon plus ou moins grand, selon l'éloignement de $\mathcal{P}i$ par rapport au sommet. On pourrait obtenir une droite ou deux droites si le plan passe par le sommet S . Le cas qui nous intéresse ici est illustré par la figure II.2, dans ce cas de figure, où l'angle de droites entre l'axe du cône et sa projection orthogonale sur le plan Π , a une mesure $\beta \in [0; \frac{\pi}{2}]$ supérieure à la mesure $\alpha \in [0; \frac{\pi}{2}]$ du demi-angle du cône, nous obtenons une courbe bornée, dont nous allons étudier les propriétés.

Comme dans le cas du cylindre nous avons inscrit 2 sphères dans le cône, de manière qu'elles soient tangentes au plan Π en des points F_1 et F_2 . Pour obtenir ces sphères tangentes à la fois au cône et au plan, on doit placer leurs centres C_1 et C_2 sur l'axe du cône, de manière à ce qu'ils soient équidistants du plan et des droites génératrices du cône. Il suffit pour cela de travailler exclusivement dans le plan perpendiculaire à Π qui contient l'axe du cône. il intercepte le cône selon les deux génératrices (SE) et (SD) . Les bissectrices intérieures et extérieures des droites (ED) et (SD) constituent l'ensemble de tous les points équidistants de (ED) et (SD) . elles interceptent donc l'axe du cône en des points C_1 et C_2 équidistants du plan Π et des génératrices (ED) , (SE) , il s'en suit que C_1 et C_2 sont équidistants de Π et de toute autre génératrice du cône; on aurait pu effectuer la même construction avec les bissectrices de (ED) et (SE) . On peut ainsi construire les deux seules sphères tangentes au plan Π et inscrites dans le cône, à partir de leurs centre C_1 et C_2 . Tous les points de contacts entre les sphères et le cône constituent 2 cercles \mathcal{C}_1 et \mathcal{C}_2 , situés respectivement dans des plans Π_1 et Π_2 perpendiculaires à l'axe du cône (voir II.2), Toute génératrice du cône est donc tangente aux deux sphères, en des points tels que les points M_1 et M_2 de la figure II.2, que nous avons placés sur les cercles \mathcal{C}_1 et \mathcal{C}_2 . Une telle génératrice coupe de plus le plan Π en un point M , qui est l'extrémité commune de 4 segments tangents en leurs autres extrémités à l'une des deux sphères. En utilisant le lemme 1 des segments tangents

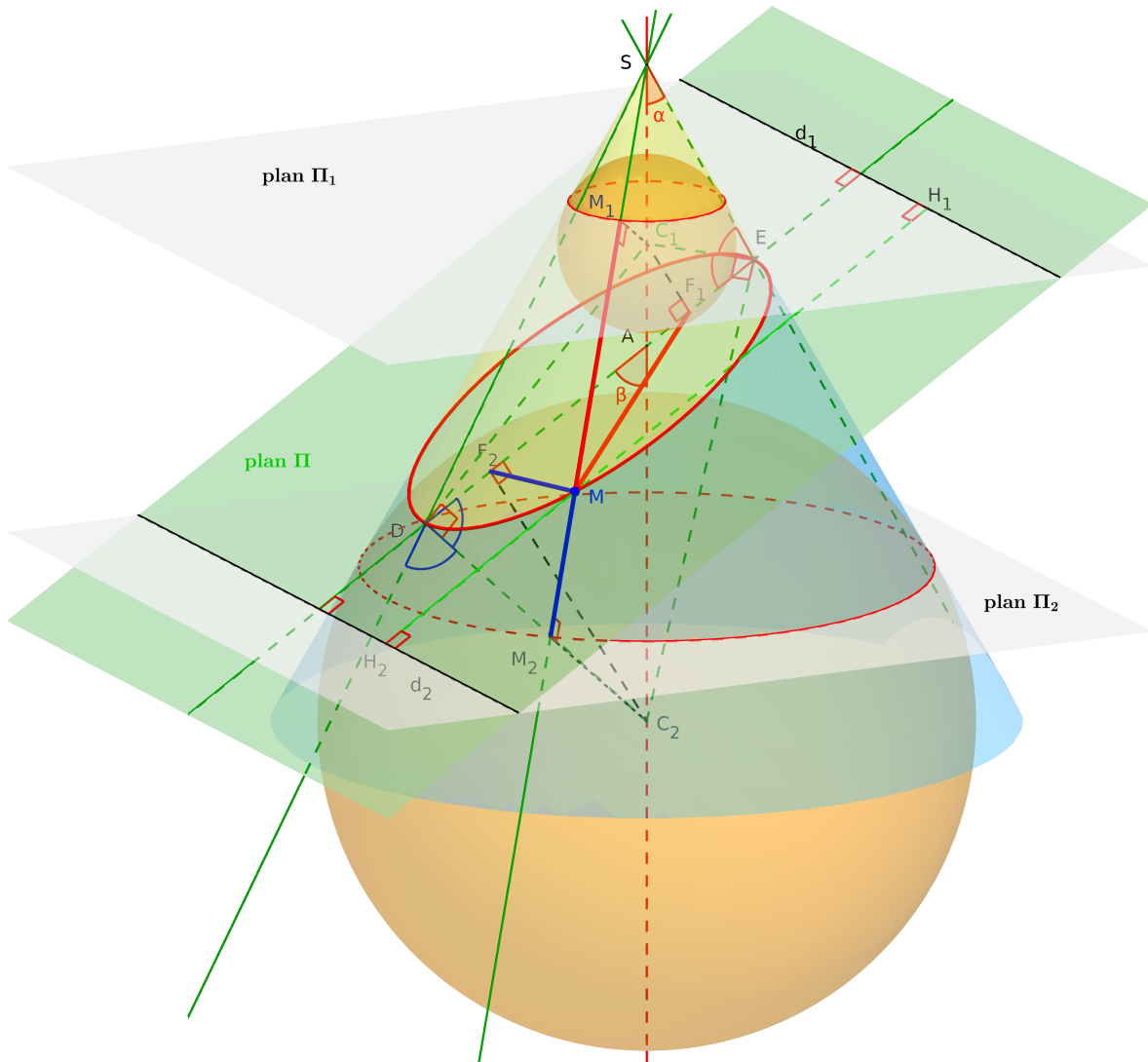


FIGURE II.2 – Ellipse obtenue par section plane d'un cône ($\alpha < \beta$).

à une sphère, on montre que pour tout point $M \in \mathcal{P} \cap \mathcal{E}$ on a les égalités suivantes :

$$MF_1 + MF_2 = MM_1 + MM_2 \quad \text{et} \quad M_1M_2 = MF_1 + MF_2 = C_1C_2 \cos \alpha$$

Lorsque la génératrice (M_1M_2) parcourt toutes les positions possibles, M décrit donc une courbe plane telle que la somme $d = MF_1 + MF_2$ soit constante.

II-2 Propriétés de déduites la définition bifocale

2-1 Caractérisation d'une ellipse par ses foyers et son diamètre

Nous venons d'observer des courbes dont chaque point est tel que, la somme des distances entre lui et deux autres points fixes soit constante. Cela nous amène à poser cette première définition d'une ellipse, dite définition bifocale, qui généralise celle d'un cercle.

DÉFINITION 3 Dans un plan euclidien Π , étant donné les points F_1 et F_2 et un réel $d > F_1F_2$, l'ellipse de foyers F_1 et F_2 et diamètre maximum d , est l'ensemble des points tels que $MF_1 + MF_2 = d$.

Ce type de courbe généralise la notion de cercle qui peut être vu comme une ellipse dont les deux foyers seraient confondus. Désignons par \mathcal{E} une telle ellipse, si les foyers sont confondus on obtient évidemment un cercle de diamètre d centré sur le foyer devenu unique. La constante d doit nécessairement être supérieure ou égale à la distance F_1F_2 pour obtenir un ensemble non vide, car pour tout point M , on a d'après l'inégalité triangulaire $MF_1 + MF_2 \geq F_1F_2$. Si F_1F_2 était égal à d , pour qu'un point M puisse vérifier $MF_1 + MF_2 = d$ il faut qu'il soit sur le segment $[F_1F_2]$. À priori, on supposera donc toujours l'inégalité stricte $d > F_1F_2$, car il est inenvisageable de supposer qu'un segment puisse être une conique, puisque cet ensemble de points ne peut pas être réalisé par intersection d'un cône avec un plan. La dénomination diamètre maximum se justifie par le fait que si M et M' sont des points de cette ellipse, alors $MM' \leq d$ et lorsque $F_1 \neq F_2$, il existe une seule paire de points pour laquelle on a l'égalité. Si on s'en tenait à la définition topologique du diamètre d'une partie \mathcal{A} incluse dans un espace métrique E , le qualificatif maximum est superflu, puisqu'il s'agit de la borne supérieure des distances entre 2 points de \mathcal{A} . Ce mot diamètre sert aussi selon le contexte à désigner ce qui n'est plus un nombre, mais l'objet géométrique qu'est le segment joignant 2 points de l'ellipse, qui a la particularité de passer par le milieu des deux foyers. Dans un cercle toutes les cordes qui passent par le centre ont même mesure et sont des diamètres, par contre, dans le cas d'une ellipse, on peut montrer qu'il y a une unique corde de longueur maximum, qu'on appelle grand axe pour lever toute ambiguïté.

En effet si $[MM']$ est une corde de \mathcal{E} , le quadrilatère F_1MF_2M' a pour périmètre $MF_1 + MF_2 + M'F_1 + M'F_2 = 2d$; pour $i = 1$ ou $i = 2$ l'inégalité $MF_i + F_iM' \leq d$ est donc nécessairement vérifiée, ce qui permet d'établir cette autre inégalité : $MM' \leq MF_i + F_iM' \leq d$. Si c'est l'égalité qui est vérifiée, on en déduit $MF_1 + F_1M' = MF_2 + F_2M' = d = MM'$, dans cette situation F_1 et F_2 doivent être sur le segment $[MM']$, et les points F_1, M, F_2 et M' sont par conséquent alignés. Mais seulement deux points de l'ellipse peuvent appartenir à la droite (F_1F_2) :

- A_1 sur la demi-droite opposée à $[F_1F_2)$ tel que la distance $x = A_1F_1$ vérifie :

$$A_1F_1 + A_1F_2 = x + x + F_1F_2 = d \quad \Rightarrow \quad x = \frac{d - F_1F_2}{2},$$

- A_2 sur la demi-droite opposée à $[F_2F_1)$ tel que la distance $x' = A_2F_2$ vérifie :

$$A_2F_1 + A_2F_2 = x' + F_1F_2 + x' = d \quad \Rightarrow \quad x' = \frac{d - F_1F_2}{2}.$$

On a donc $x = x'$ et $A_1A_2 = x + F_1F_2 + x = d$, l'unique corde de \mathcal{E} de longueur d est donc $[A_1A_2]$, et celle-ci a le même milieu que $[F_1F_2]$. Les 2 points A_1 et A_2 que nous venons de déterminer seront appelés sommets de l'ellipse, et la longueur d diamètre maximum ou tout simplement diamètre de l'ellipse, le mot grand axe pourra aussi selon le contexte désigner ce nombre.

Nous avons montré au passage qu'étant donné une ellipse, la paire de foyers qui sert à la définir est nécessairement unique. Les calculs qui précèdent montrent que si F_1 et F_2 sont les foyers d'une ellipse \mathcal{E} de diamètre d , ces points sont nécessairement sur l'unique corde $[A_1A_2]$ de longueur maximum. et que de plus le segment $[F_1F_2]$ doit avoir le même milieu O que $[A_1A_2]$. La construction du losange $F_1B_1F_2B_2$ de côté a et centre O , nous permet de mettre en évidence les deux uniques points B_1 et B_2 de \mathcal{E} qui appartiennent à la médiatrice de $[A_1A_2]$. (voir figure II.6). Toute autre paire $\{F'_1, F'_2\}$ de foyers différente de $\{F_1, F_2\}$, telle que $[F'_1F'_2] \subset [A_1A_2]$ et $OF'_1 = OF'_2$, permet de définir un autre ellipse \mathcal{E}' admettant le même diamètre et les mêmes

sommets que \mathcal{E} , mais la construction du losange $F'_1 B'_1 F'_2 F'_2$ de côté a et centre O permettrait de mettre en évidence deux points B'_1 et B'_2 sur \mathcal{E}' , qui ne pourraient pas appartenir à \mathcal{E} , puisque pour $i = 1$ ou $i = 2$ on a :

$$F'_i B'_i = F_i B_i = a \quad \text{et} \quad OF'_i \neq OF_i \quad \Rightarrow \quad OB_i \neq OB'_i$$

2-2 Construction d'un cône dont l'ellipse est une section plane

Nous voulons montrer que cette définition bifocale d'une ellipse proposée en II-2-1, qui nous a été suggérée par les propriétés constatées dans le paragraphe II-1, est équivalente à la définition par section conique entrevue à la fin du chapitre d'introduction. Nous avons alors évoqué l'ellipse comme courbe obtenue selon certaines conditions sur les angles d'incidence, par intersection d'un cône et d'un plan. Pour montrer qu'il y a bien équivalence, il faut qu'à partir de la définition par foyers et diamètre, d'une ellipse quelconque située dans un plan Π , nous puissions reconstruire un cône ou un cylindre, dont l'intersection avec Π soit exactement l'ensemble de tous les points de cette ellipse.

Étant donné deux points F_1 et F_2 situés dans le plan Π , considérons l'ellipse \mathcal{E} représentée en bleu sur la figure II.3 définie comme étant l'ensemble des points M de ce plan tels que $MF_1 + MF_2 = 2a$, on désignera par A_1 et A_2 les deux points particuliers de cette ellipse situés sur l'axe focal $(F_1 F_2)$, qui sont les seuls à pouvoir vérifier : $A_1 F_1 + A_1 F_2 = A_2 F_1 + A_2 F_2 = 2a$. Puisque la paire de foyers d'une ellipse est unique, pour pouvoir rétablir une situation telle que celle des figures II.2 ou II.1, il est nécessaire que nous puissions inscrire dans le cône ou le cylindre recherché, deux sphères tangentes à Π avec point de contact en F_1 et F_2 . Commençons par la construction d'une première sphère \mathcal{S}_1 , dont le centre C_1 sera sur la droite d_1 perpendiculaire à Π en F_1 . L'axe focal $(F_1 F_2)$ doit être tangent à cette sphère, le cône ou le cylindre recherché doit donc admettre pour génératrices tangentes à cette sphère, les deux droites g_1 et g_2 symétriques de $(F_1 F_2)$ par rapport à $(A_1 C_1)$ et $(A_2 C_1)$. Si ces deux droites sont sécantes, leur point d'intersection fournit le sommet S d'un cône. Mais g_1 et g_2 pourraient être parallèles, c'est le cas si $C_1 A_1 A_2$ est un triangle rectangle, lorsque C_1 est dans l'une des deux positions possibles à l'intersection de d_1 et de la sphère de diamètre $[A_1 A_2]$ (voir figure II.4); c'est un cylindre qu'il faut alors envisager de construire. Dans tous les cas de figure, l'autre sphère \mathcal{S}_2 tangente au plan Π et inscrite dans le cône ou le cylindre, doit avoir son centre C_2 équidistant des génératrices g_1 , g_2 et de l'axe focal. Si les génératrices g_1 et g_2 sont parallèles, C_2 est obtenu à l'intersection de la droite d_2 perpendiculaire à Π en F_2 et de la droite passant par C_1 parallèle à l'axe et aux génératrices du cylindre. Si g_1 et g_2 sont sécantes, C_2 est nécessairement l'un des quatre centres des cercles inscrits ou exinscrits dans le triangle $SA_1 A_2$, le seul qui puisse être sur d_2 sera le centre de notre deuxième sphère. D'après leurs propriétés constatées dans le paragraphe 1-2, nous savons que les intersections d'un tel cône ou cylindre avec le plan Π , est un ensemble \mathcal{C} de points pour lequel il existe une constante c telle que : $M \in \mathcal{C} \Rightarrow MF_1 + MF_2 = c$. Cette constante c est nécessairement égale à $A_1 F_1 + A_1 F_2 = A_2 F_1 + A_2 F_2 = 2a$, car dans le plan Π , les sommets A_1 et A_2 sont des points remarquables de \mathcal{E} qui appartiennent évidemment au cône ou au cylindre que nous venons de construire, on a donc $\mathcal{C} \subset \mathcal{E}$.

Mais il faudrait s'assurer qu'il y a en fait égalité et non cette simple inclusion, en montrant que tout point de \mathcal{E} est nécessairement sur le cône ou le cylindre que nous venons de construire. Nous le ferons en V-4-1 lors de la démonstration du théorème de Dandelin, qui ne concerne pas que l'ellipse, mais aussi tous les autres types de coniques. Remarquons qu'il y a une infinité

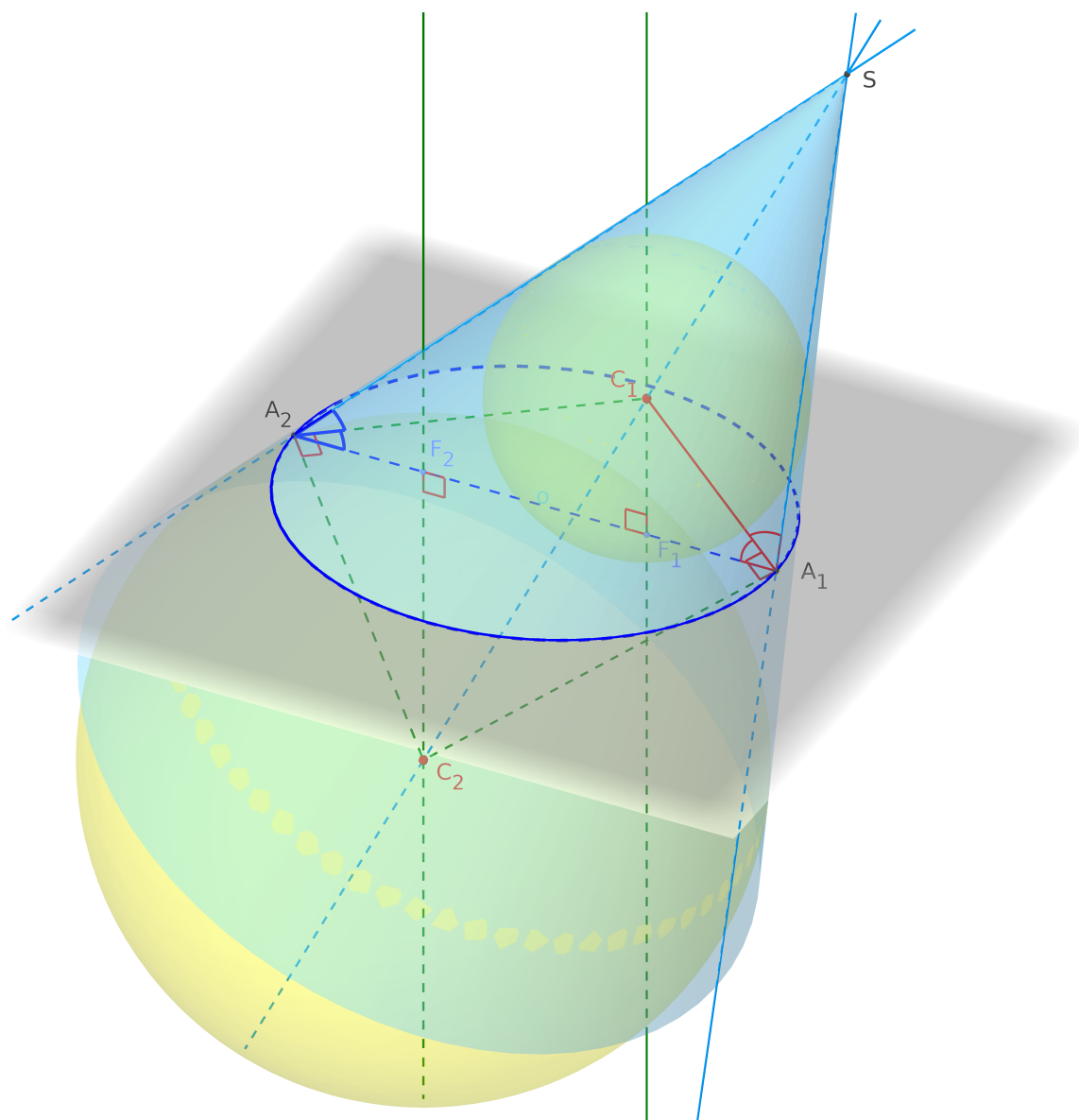


FIGURE II.3 – Construction d'un cône dont la trace dans le plan Π est l'ellipse.

de solution au problème posé, car le centre de la sphère \mathcal{S}_1 a pu être choisi arbitrairement sur la perpendiculaire à Π en F_1 . Le lieu du sommet S d'un cône qui passe par tous les points d'une ellipse, sera calculé à partir de toutes les positions possible de C_1 sur $d_1 \setminus \{F_1\}$.

Le cas de figure où l'ellipse est obtenue par intersection de son plan avec un cylindre, nous intéressera particulièrement lorsque nous évoquerons en V-7-3, les propriétés des ellipses de Steiner dans un triangle. Cette situation montre que pour toute ellipse de l'espace, il existe une projection orthogonale de l'espace sur un plan, telle que l'ellipse soit projetée en un cercle. On peut même ajouter qu'il n'existe que deux directions possibles de projection, car il n'y a que deux cylindres qui passent par tous les points d'une ellipse quelconque non circulaire, nous avons vu en effet plus haut, qu'il n'existe que deux positions de C_1 sur d_1 qui permettent cette construction.

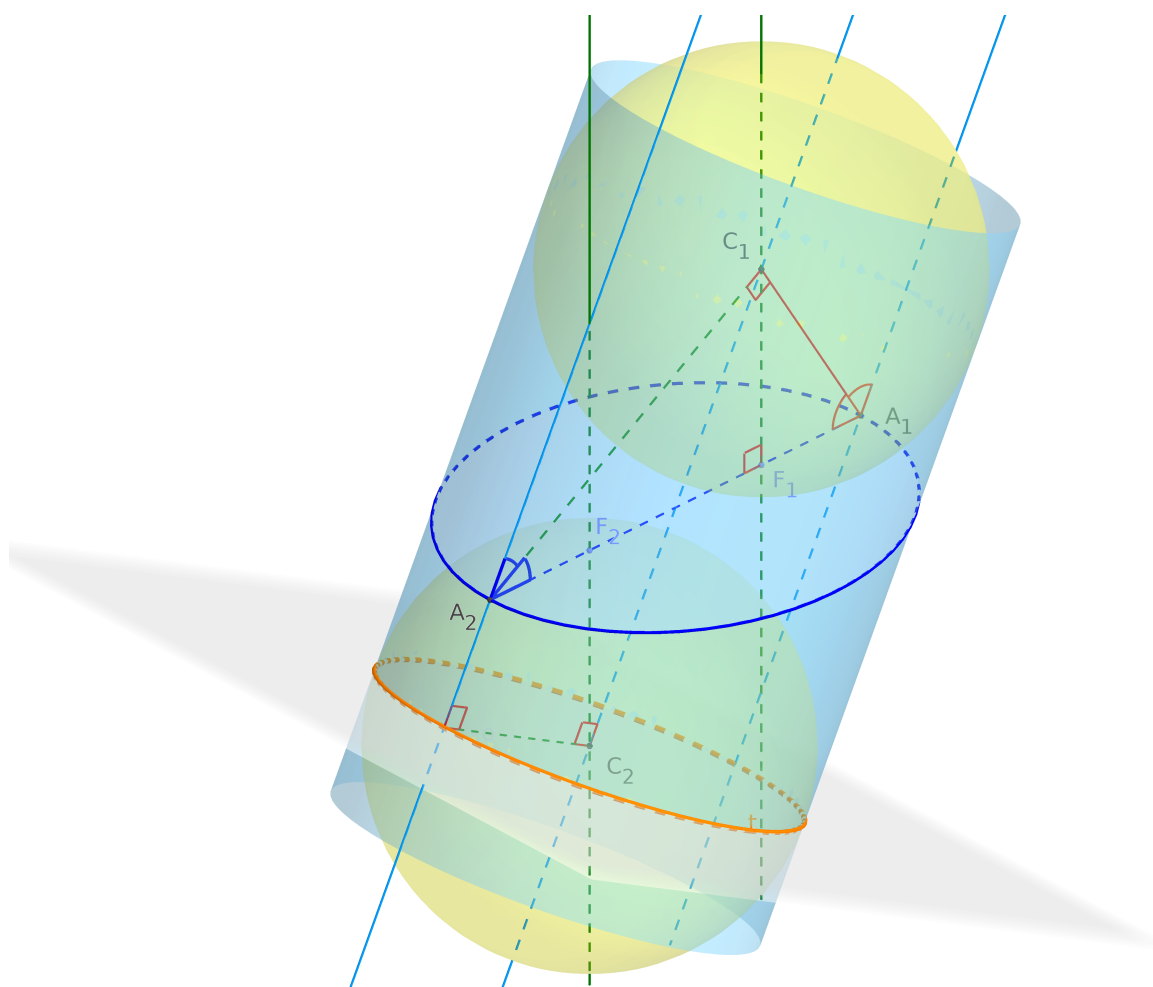


FIGURE II.4 – Un plan sur lequel l'ellipse se projette orthogonalement en un cercle.

2-3 Construction par les cercles directeurs

La figure II.5 illustre aussi comment voir chaque point de l'ellipse comme centre d'un cercle passant par F_2 , qui est de plus tangent au cercle de centre F_1 et rayon $d = 2a$, nous appellerons ce dernier, **cercle directeur** de centre F_1 pour l'ellipse \mathcal{E} . Remarquons que les cercles en questions ne peuvent qu'être tangents intérieurement, étant donné que F_2 est intérieur au cercle directeur de rayon $d > F_1F_2$. De plus tout cercle tangent au cercle directeur de centre F_1 doit avoir son centre sur un rayon $[XF_1]$, tel que X appartienne au cercle directeur. Pour que ce cercle passe par F_2 et X , son centre doit être sur la médiatrice de $[XF_2]$; on obtient donc un point de l'ellipse de foyers F_1 et F_2 à l'intersection de la médiatrice de $[XF_2]$ et du rayon $[F_1X]$. Le rayon du cercle directeur est bien la constante à laquelle doit être égale la somme $MF_1 + MF_2$, car $MF_2 = MX$ et $MF_1 + MX = F_1X = d$. On obtient donc notre ellipse \mathcal{E} , comme lieu du point M , lorsque X parcourt le cercle directeur. Le rôle des foyers est interchangeable, une ellipse admet donc deux cercles directeurs de même rayon d , centrés sur l'un des de ses 2 foyers.

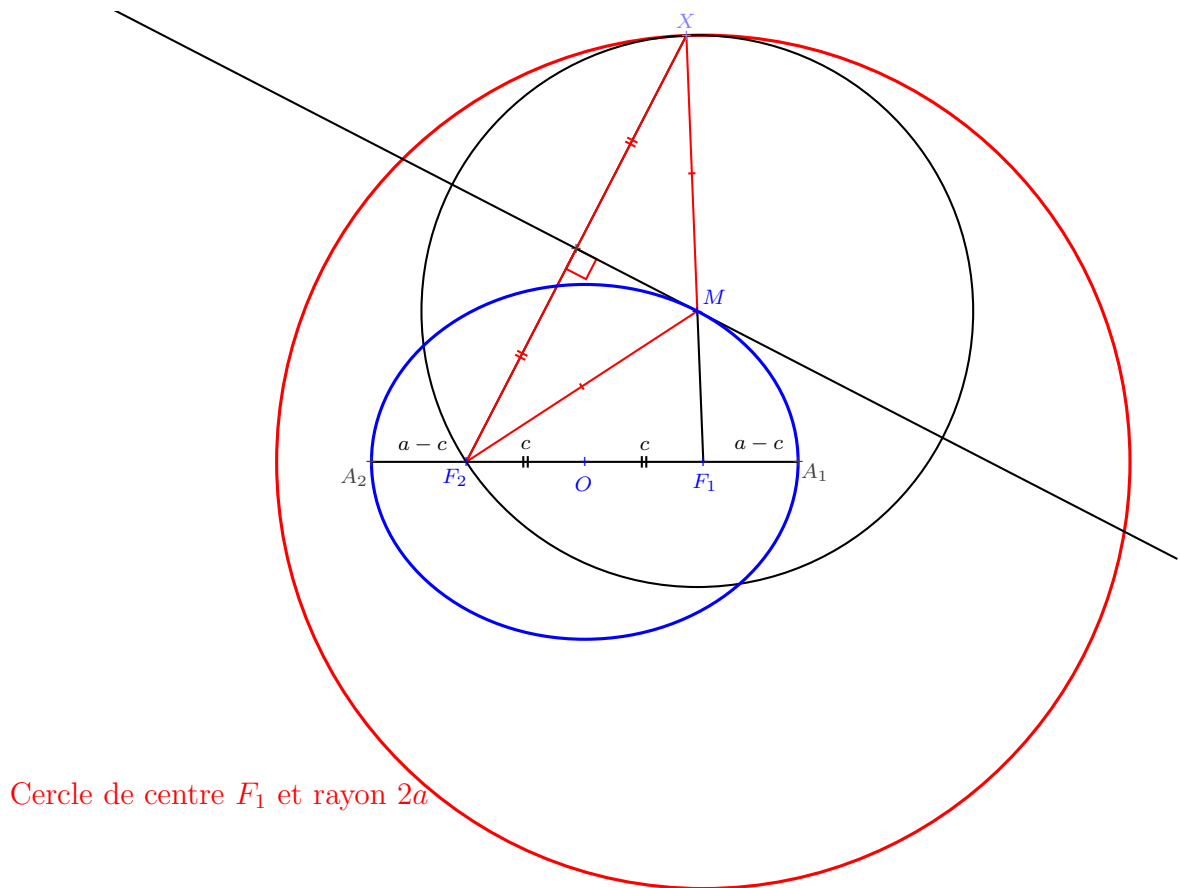


FIGURE II.5 – Ellipse construite à partir du foyer F_2 et du cercle directeur de centre F_1 et rayon $d > F_1F_2$.

2-4 Droites tangentes à l'ellipse

Reprenons la figure II.5, tout point M' sur la médiatrice de $[F_2X]$ différent de M ne peut être sur \mathcal{E} , car $M'X + M'F_1 > XF_1 = d$. cette médiatrice n'a donc que le point M qui puisse être sur \mathcal{E} . En anticipant le fait qu'une ellipse soit une courbe différentiable, cette remarque fournit une première approche de la notion de tangente à une ellipse, puisque cette médiatrice ne peut «toucher» l'ellipse qu'en un seul point. On peut construire cette tangente en $M \in \mathcal{E}$, comme bissectrice extérieure de $\widehat{F_1MF_2}$, c'est à dire la perpendiculaire à la bissectrice de l'angle $\widehat{F_1MF_2}$ en son sommet M . Cet angle est nul dans le cas particulier d'un cercle avec $F_1 = F_2$, on retrouve alors une tangente qui est bien la perpendiculaire à la bissectrice intérieure qui se confond avec le support d'un rayon du cercle.

On peut se satisfaire de cette façon d'aborder les tangentes à une ellipse de la même manière qu'on considère les tangentes à un cercle, mais la notion de tangente à une courbe doit être introduite plus rigoureusement, sur des bases de calcul différentiel ignorées des anciens, ce qui suit peut donc être ignoré par un géomètre qui n'est pas encore familiarisé avec ces notions. On fera appel pour cela à une représentation $u : I \rightarrow \mathcal{P}$, où I est un intervalle de \mathbb{R} et

$$t \mapsto u(t)$$

\mathcal{A} 'espace affine de dimension 2 qui contient \mathcal{E} ; $u(t)$ peut être interprété, comme la position à l'instant t d'un mobile ponctuel qui parcourt entièrement cette ellipse. Admettons pour le moment qu'il existe des représentations paramétriques u différentiables, nous en donnerons

au moins 2 exemples par la suite. Soit la fonction $F : \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{R}$, si u est une paramétrisation d'une ellipse du plan affine euclidien Π , la fonction $f = F \circ u$ est constante, nous allons utiliser le fait que la différentielle de cette fonction est donc nulle.

Pour tout repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$, si $M(x; y)$ désigne un point de Π de coordonnées $(x; y)$ dans ce repère, la différentielle de la fonction $n_O : \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{R} = \sqrt{x^2 + y^2}$ en $M(x; y) \mapsto OM$

un point $M_0(x_0; y_0)$, est une forme linéaire qui peut s'exprimer par le produit scalaire, avec un vecteur appelé le gradient que l'on peut exprimer indépendamment des vecteurs \vec{i} et \vec{j} , puisque la fonction numérique n_O est dépendante du seul point O , en effet :

$$\frac{\partial n_O}{\partial x}(x_0, y_0)\vec{i} + \frac{\partial n_O}{\partial y}(x_0, y_0)\vec{j} = \frac{x_0}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2}}\vec{i} + \frac{y_0}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2}}\vec{j} = \frac{\overrightarrow{OM_0}}{OM_0}$$

On a donc un champ de vecteurs qui associe à chaque point $M \in \mathcal{P}$, le vecteur unitaire de même direction et même sens que \overrightarrow{OM} ; la différentielle en $u(t_0) = M_0$ de la fonction F somme de n_{F_1} et n_{F_2} , est donc le produit scalaire par $\frac{\overrightarrow{F_1M_0}}{F_1M_0} + \frac{\overrightarrow{F_2M_0}}{F_2M_0}$. Lorsque l'on dérive la fonction composée $F \circ u$, en effectuant le produit matriciel de la matrice uniligne de $F'(u(t))$ par la matrice unicolonne de $u'(t)$, on aboutit au nombre dérivé en t , qui peut être interprété comme le produit scalaire $\overrightarrow{u'(t)} \left(\frac{\overrightarrow{F_1u(t)}}{F_1u(t)} + \frac{\overrightarrow{F_2u(t)}}{F_2u(t)} \right)$, celui-ci est nul pour tout t étant donné que $F \circ u$

est constante. Or la tangente à \mathcal{E} en un point $M = u(t)$ de l'ellipse \mathcal{E} est dirigée par $\overrightarrow{u'(t)}$, le produit scalaire nul précédent prouve qu'elle est perpendiculaire à la diagonale d'un losange de côté 1, dont 2 côtés sont portés par (F_1M) et (F_2M) , cette diagonale dirige la bissectrice de $\widehat{F_1MF_2}$. La tangente en M à l'ellipse est donc bien la bissectrice extérieure de $\widehat{F_1MF_2}$, qui est aussi la médiatrice de $[F_2X]$ (voir figure II.5)

Le rôle des foyers étant interchangeable, il y a deux cercles directeurs, mais il y a toujours un seul cercle principal \mathcal{C}_p , que l'on peut définir comme image du cercle directeur de centre F_1 par l'homothétie de rapport $\frac{1}{2}$ et centre F_2 , on obtient le même cercle comme image du deuxième cercle directeur de centre F_2 par l'homothétie de même rapport et centre F_1 .

Lorsqu'on projette les deux foyers sur une tangente à l'ellipse, on obtient donc des points sur \mathcal{C}_p . Leurs symétriques par rapport au centre du cercle sont bien évidemment aussi sur \mathcal{C}_p . Ceci fait apparaître les égalités $F_1H_1 = F_2H'_1$ et $F_2H_2 = F_1H'_1$, on en déduit que les puissances par rapport au cercle principal¹ de F_1 ou F_2 à l'intérieur de ce cercle sont négatives et égale à :

$$-F_1H_1 \times F_2H_2 = a^2 - c^2 \quad , \text{ où l'on a posé } a = \frac{d}{2} = \frac{S_1S_2}{2} \quad \text{et} \quad c = \frac{F_1F_2}{2}$$

Quelque soit la tangente on obtient donc un produit constant, cette remarque nous sera très utile au paragraphe V-5-3, pour établir certaines propriétés de la conjugaison isogonale par rapport à un triangle.

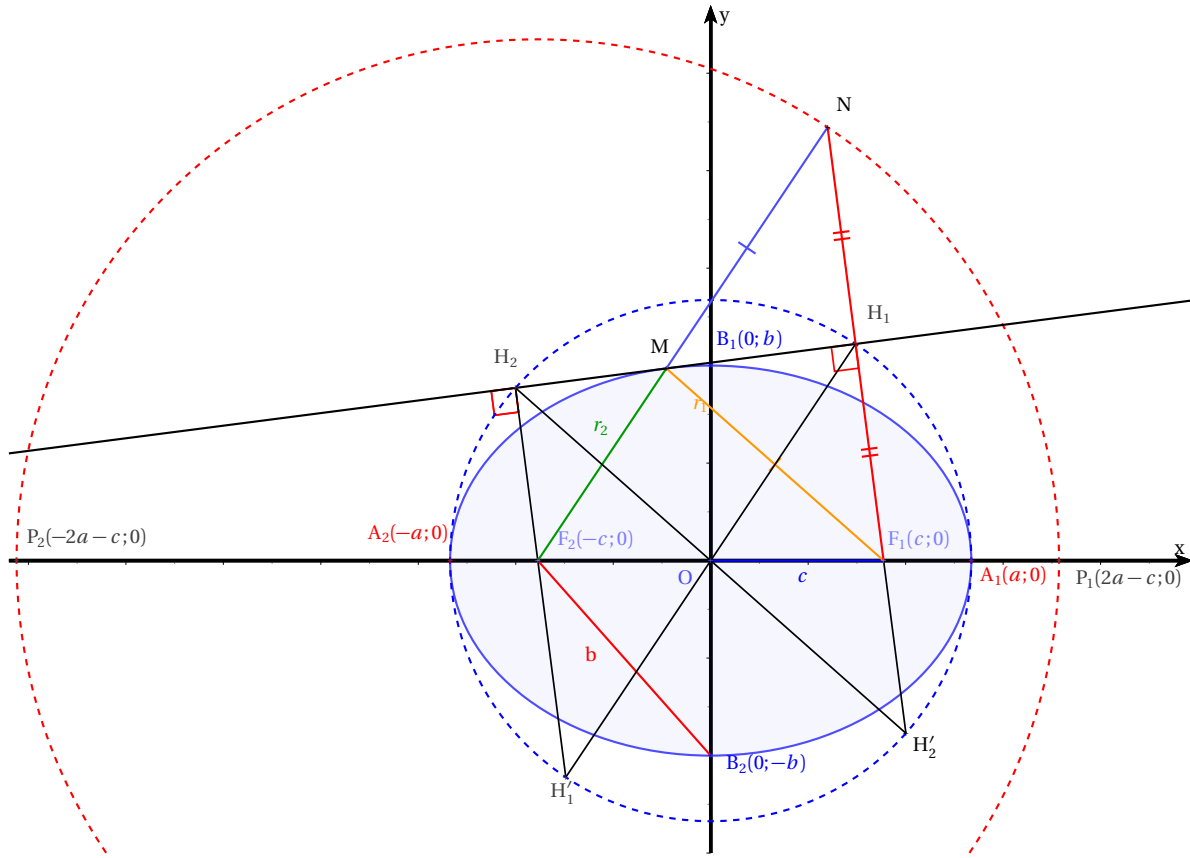


FIGURE II.6 – Points et cercles remarquables d'une l'ellipse.

II-3 Équations cartésiennes

3-1 Choix du repère

Étant donné une ellipse \mathcal{E} de foyers F_1, F_2 et diamètre maximum d , choisissons le repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ comme sur la figure II.6, tel que O soit milieu des foyers et $\vec{i} = \frac{1}{OF_1} \overrightarrow{OF_1}$.

Posons $a = \frac{d}{2}$, $c = OF_1 = OF_2$ et $b = \sqrt{a^2 - c^2}$, dans ce repère, les sommets A_1 et A_2 déjà connus ont pour coordonnées $(a; 0)$ et $(-a; 0)$, auxquels on peut ajouter 2 autres points particuliers de \mathcal{E} : $B_1(0; b)$ et $B_2(0; -b)$, on a en effet :

$$\begin{cases} A_1F_1 + A_1F_2 = A_2F_1 + A_2F_2 = (a - c) + (a + c) = 2a = d \\ B_1F_1 + B_1F_2 = B_2F_1 + B_2F_2 = 2\sqrt{c^2 + b^2} = 2a = d \end{cases}$$

Soit M de coordonnées $(x; y)$, posons $r_1 = MF_1$ et $r_2 = MF_2$ on a :

$$\begin{cases} r_1^2 = (x - c)^2 + y^2 \\ r_2^2 = (x + c)^2 + y^2 \end{cases} \implies (r_2 + r_1)(r_2 - r_1) = r_2^2 - r_1^2 = 4cx$$

1. Puissance d'un point par rapport à un cercle définie en 5-1

Si M est un point de l'ellipse \mathcal{E} , on a $r_1 + r_2 = 2a$ et par conséquent $r_2 - r_1 = \frac{2cx}{a}$, donc

$$\begin{cases} r_2 = a + \frac{cx}{a} \\ r_1 = a - \frac{cx}{a} \end{cases}, \text{ on en déduit les équations équivalentes suivantes :}$$

$$\left(a - \frac{cx}{a}\right)^2 = (x - c)^2 + y^2 \quad \text{ou} \quad \left(a + \frac{cx}{a}\right)^2 = (x + c)^2 + y^2 \quad \text{ou}$$

En utilisant l'égalité $a^2 - c^2 = b^2$, on obtient finalement l'équation

$$\left(1 - \frac{c^2}{a^2}\right)x^2 + y^2 + c^2 - a^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Réciproquement si un point $M(x; y)$ vérifie l'équation $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ avec $0 < b \leq a$, vérifions qu'il est sur une ellipse de diamètre maximum $2a$ dont nous devons retrouver les foyers. On peut poser $c = \sqrt{a^2 - b^2}$ et construire les points $F_1(c; 0)$ et $F_2(-c; 0)$.

Des égalités $y^2 = b^2 - \frac{b^2}{a^2}x^2$ et $a^2 - b^2 = c^2$, on peut déduire :

$$\begin{cases} F_1M^2 = (x - c)^2 + y^2 = (x^2 - 2xc + c^2) + \left(b^2 - \frac{b^2}{a^2}x^2\right) \\ F_2M^2 = (x + c)^2 + y^2 = (x^2 + 2xc + c^2) + \left(b^2 - \frac{b^2}{a^2}x^2\right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} F_1M^2 = \frac{c^2}{a^2}x^2 - 2cx + a^2 = \left(\frac{xc}{a} - a\right)^2 \\ F_2M^2 = \frac{c^2}{a^2}x^2 + 2cx + a^2 = \left(\frac{xc}{a} + a\right)^2 \end{cases}$$

L'équation $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ implique que l'on ait $\left|\frac{y}{b}\right| \leq 1$ et $\left|\frac{x}{a}\right| \leq 1$, on en déduit $\left|\frac{xc}{a}\right| \leq c < a$ et

par conséquent : $\begin{cases} F_1M = a - \frac{xc}{a} \\ F_2M = \frac{xc}{a} + a \end{cases}$, on a donc $F_1M + F_2M = 2a$; on obtient des points

qui sont sur une ellipse de grand axe $2a$ et foyers $F_1(c; 0)$ et $F_2(-c; 0)$. Cela nous permet de proposer cette deuxième définition d'une ellipse :

DÉFINITION 4 *Dans un plan euclidien Π , une ellipse est une courbe plane pour laquelle il existe un couple $(a; b)$ de nombres réels tels que $0 < b \leq a$, et un repère orthonormé du plan dans lequel elle se situe, pour lequel elle admet une équation cartésienne du type : $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.*

Nous venons de montrer que son grand axe est $2a$, et que si l'on pose $c = \sqrt{a^2 - b^2}$, les points $F_1(c; 0)$ et $F_2(-c; 0)$ sont ses foyers. On pourrait imaginer un équation de la forme $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ avec $0 < a \leq b$, dans ce cas, il faut poser $c = \sqrt{b^2 - a^2}$ et construire les points $F_1(0; c)$ et $F_2(0; -c)$. Les égalités $x^2 = a^2 - \frac{a^2}{b^2}y^2$ et $a^2 + c^2 = b^2$, comme précédemment

implique $F_1M + F_2M = 2b$; cette fois ci, on obtient des points sur une ellipse de diamètre maximum $2b$, dont les foyers sont sur l'axe des ordonnées. Il faudrait inverser le rôle de l'axe des abscisses et des ordonnées, pour voir que nous sommes en présence d'une ellipse de grand axe $2b$, selon la définition 4.

Si $M(x; y)$ et $M'(-x; -y)$ sont 2 points de l'ellipse \mathcal{E} symétriques par rapport à O , on montre que $MM'^2 = 4(x^2 + y^2) = 4\left(\left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right)x^2 + b^2\right)$. Dans le cas où $0 < b < a$, la distance MM' est minimum pour $x = 0$ et prend la valeur $2b$, le segment $[B_1B_2]$ est donc l'unique corde passant par le centre O de longueur minimum, on l'appelle petit axe de l'ellipse; ce terme selon le contexte désigne aussi la mesure $B_1B_2 = 2b$.

3-2 Équations cartésiennes des tangentes et normales

Étant donné le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$, considérons la fonction $\varphi : \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{R}$, les

$$M(x; y) \mapsto \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$$

courbes de niveau de cette fonction sont des ellipses, dont \mathcal{E} en particulier est la courbe de niveau 1. Le gradient de φ est la fonction $\vec{u} : \mathcal{P} \rightarrow \vec{\mathcal{P}}$. Si le point $M_0(x_0; y_0)$

$$M(x; y) \mapsto 2\frac{x}{a^2}\vec{i} + 2\frac{y}{b^2}\vec{j}$$

est sur l'ellipse \mathcal{E} , le vecteur $\frac{1}{2}\overrightarrow{u(M_0)} = \frac{x_0}{a^2}\vec{i} + \frac{y_0}{b^2}\vec{j}$ est normal à \mathcal{E} en M_0 , on peut en déduire une équation de la tangente à \mathcal{E} en M_0 de la forme $Ax + By + C = 0$ avec $(A, B) = \left(\frac{x_0}{a^2}, \frac{y_0}{b^2}\right)$, qui doit être vérifiée par $(x_0; y_0)$, notre tangente admet donc l'équation : $\frac{x_0}{a^2}x + \frac{y_0}{b^2}y = 1$.

En prenant $\frac{a^2}{x_0}\vec{i} - \frac{b^2}{y_0}\vec{j}$ pour vecteur normal à $\overrightarrow{u(M_0)}$, on obtient pour équation de la droite normale à l'ellipse en M_0 : $\frac{a^2}{x_0}x - \frac{b^2}{y_0}y = c^2$.

II-4 Transformation par affinité

4-1 Représentation paramétrique déduite d'une affinité

L'équation cartésienne d'une ellipse en fin de paragraphe II-3 s'apparente à celle d'un cercle, que l'on peut retrouver par l'une de ces 2 transformations :

$$u : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P} \quad \text{ou} \quad v : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}$$

$$M(x; y) \mapsto M'\left(\frac{b}{a}x; y\right) \quad M(x; y) \mapsto M'\left(x; \frac{a}{b}y\right)$$

Ces transformations sont appelées affinités, la première de ces affinités qui multiplie les abscisses par $\frac{b}{a}$ transforme l'ellipse \mathcal{E} en cercle de centre O et rayon b , car si $M(x; y) \in \mathcal{E}$ alors on a

$$\left(\frac{b}{a}x\right)^2 + y^2 = b^2; \text{ une représentation paramétrique de ce cercle est : } \begin{cases} x(t) = b \cos t \\ y(t) = b \sin t \end{cases} . \text{ De } t \in]-\pi; \pi]$$

même, la deuxième affinité qui multiplie les ordonnées par $\frac{a}{b}$, transforme \mathcal{E} en un cercle de

centre O et rayon a car on a $x^2 + \left(\frac{a}{b}y\right)^2 = a^2$; une représentation paramétrique de ce cercle

$$\text{est : } \begin{cases} x(t) = a \cos t \\ y(t) = a \sin t \\ t \in]-\pi; \pi] \end{cases} .$$

En appliquant u^{-1} ou v^{-1} à ces deux cercles qui sont appelés respectivement cercle principal et cercle secondaire de l'ellipse, on obtient la représentation paramétrique de notre ellipse

$$\mathcal{E} : \begin{cases} x(t) = a \cos t \\ y(t) = b \sin t \\ t \in]-\pi; \pi] \end{cases} .$$
 Remarquons au passage que cette affinité nous permet de calculer

l'aire du domaine, à l'intérieur d'une ellipse de grand axe $2a$ et petit axe $2b$, c'est celle du cercle principal multipliée par le coefficient $\frac{b}{a}$, soit $ab\pi$.

Une ellipse est donc bien une courbe C^∞ , ce qui justifie pleinement l'étude des tangentes effectuées plus haut. On peut exprimer simplement l'équation cartésienne de la tangente en $M(x(t); y(t))$, puisqu'elle est dirigée par le vecteur de coordonnées $(x'(t); y'(t)) = (-a \sin t; b \cos t)$. Elle admet donc une équation de la forme $(b \cos t)x + (a \sin t)y = f$ qui doit être vérifiée par les coordonnées de M , on en déduit que la tangente en $M(a \cos t; b \sin t)$ admet pour équation $(b \cos t)x + (a \sin t)y = ab$.

De cette première représentation paramétrique, on peut en déduire une autre dans laquelle n'intervient aucune fonction trigonométrique; dans la paramétrisation précédente effectuons le changement de variable $u = \tan\left(\frac{t}{2}\right)$, la paramètre u décrit l'ensemble \mathbb{R} , on peut obtenir un prolongement à $\bar{\mathbb{R}}$ en posant $\tan\left(\pm\frac{\pi}{2}\right) = \pm\infty$. On obtient la paramétrisation suivante :

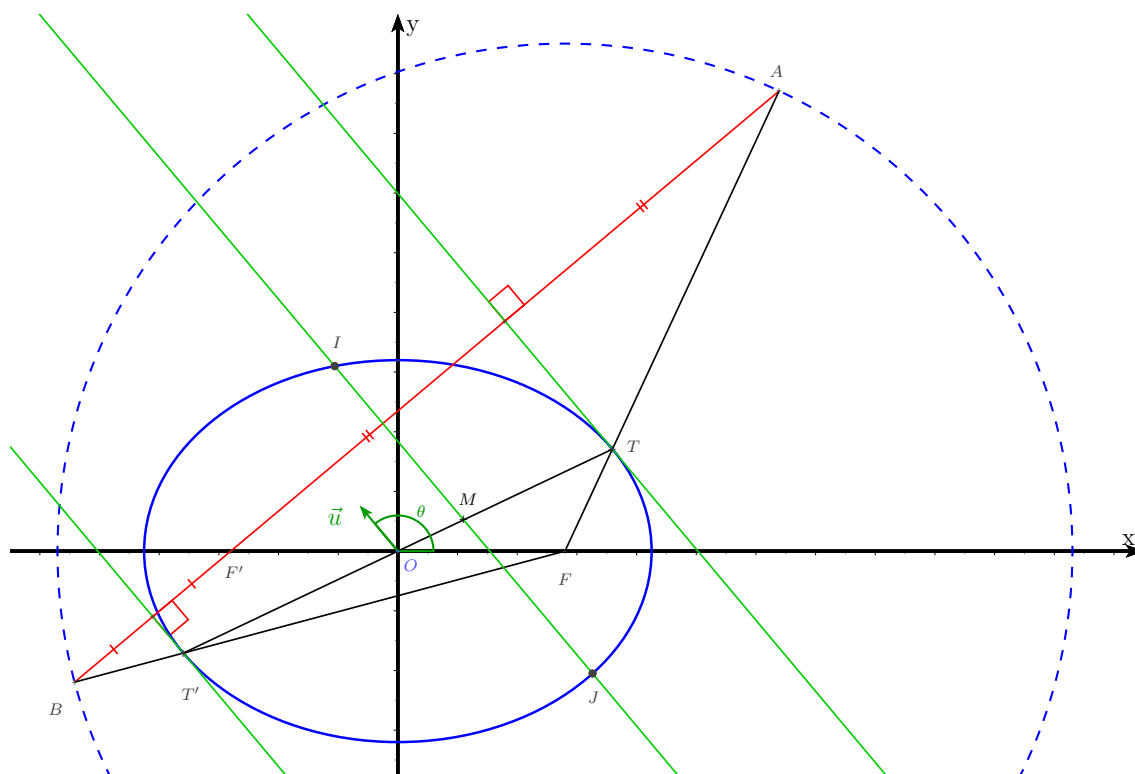
$$\begin{cases} x(u) = \frac{a(1-u^2)}{1+u^2} \\ y(u) = \frac{2bu}{1+u^2} \end{cases} ; \quad u \in [-\infty; +\infty]$$

4-2 Cordes conjuguées et théorèmes d'Appolonius

Posons d'abord le problème suivant, étant donné une direction donnée par un vecteur \vec{u} , comment construire les tangentes à une ellipse ayant cette direction ?

Si F et F' sont les foyers d'une ellipse de diamètre maximum $2a$, les tangentes recherchées sont médiatrices de segments $[F'A]$ où A est un point du cercle directeur de centre F et rayon $2a$. Pour avoir des médiatrices de même direction que \vec{u} , il faut donc que \vec{u} soit orthogonal au segment $[F'A]$. Il ne peut donc y avoir que deux tangentes à l'ellipse dirigée par \vec{u} . On peut les construire à partir des deux points A et B du cercle directeur sur la droite orthogonale à \vec{u} passant par F' , les points de contacts avec l'ellipse sont T et T' , obtenus par intersection des médiatrices de $[F'A]$ et $[F'B]$ respectivement avec les rayons $[FA]$ et $[FB]$ du cercle directeur. Puisque le milieu O de $[FF']$ est centre de symétrie de l'ellipse, les deux uniques tangentes de même direction que \vec{u} sont nécessairement symétriques par rapport à O , qui est donc aussi le milieu de la corde $[TT']$. Cela permet de démontrer le premier théorème d'Appolonius.

THÉORÈME 1 *Les milieux de toutes les cordes d'une ellipse ayant une direction donnée, est un segment qui passe par le centre de l'ellipse et joint les deux points de contact entre l'ellipse et ses tangentes qui ont la direction fixée par avance.*

FIGURE II.7 – Lieu du milieu des cordes d'une ellipse dirigées par \vec{u} .

Étant donné la direction fixée par un vecteur $\vec{u} = \cos \theta \vec{i} + \sin \theta \vec{j}$, il nous suffit de montrer que tout point M sur le segment $[TT']$ que nous venons de construire, est le milieu d'une corde dirigée par \vec{u} . Utilisons pour cela le repère du paragraphe précédent dans lequel notre ellipse admettait

la représentation paramétrique
$$\begin{cases} x(t) = a \cos t \\ y(t) = b \sin t \\ t \in]-\pi; \pi] \end{cases}$$
, le point T est un point de coordonnées

$(a \cos t; b \sin t)$, tel que la tangente en ce point soit dirigée par $\vec{v} = -a \sin t \vec{i} + b \cos t \vec{j}$, les deux tangentes à l'ellipse en T et T' symétriques par rapport à O , admettent donc pour équation : $(b \cos t)x + (a \sin t)y = \pm ab$, les cordes de l'ellipse passant par un point du segment $[TT']$ et parallèle à la tangente en T admettent des équations de la forme $(b \cos t)x + (a \sin t)y = f$ avec $f \in]-ab; ab[$. Les points d'intersection d'une telle corde avec l'ellipse ont des coordonnées $(a \cos \varphi; b \sin \varphi)$ qui vérifient donc $ab \cos(t - \varphi) = f$, d'où $\varphi = t \pm \cos^{-1} \frac{f}{ab}$. On obtient donc les points d'intersection $I(a \cos(t + \varphi); b \sin(t + \varphi))$ et $J(a \cos(t - \varphi); b \sin(t - \varphi))$, qui ont pour milieu $M(a \cos t \cos \varphi; b \sin t \cos \varphi)$, on a donc $\vec{OM} = \cos \varphi \vec{OT}$, cela montre que ce milieu M est bien sur la corde $[TT']$ passant par O .

DÉFINITION 5 *La corde conjuguée d'une corde de l'ellipse passant par son centre, est la corde obtenue selon le théorème précédent comme lieu des milieux de toutes les cordes qui lui sont parallèles.*

Il est évident que dans le cas particulier d'un cercle, les cordes conjuguées sont tout simplement des diamètres perpendiculaires. On en déduit la démonstration du deuxième théorème d'Apollonius concernant les cordes conjuguées d'une ellipse, puisque leurs images par l'affinité

qui transforme l'ellipse en le cercle principal doivent être des diamètres perpendiculaires de ce cercle. Il en est ainsi car une affinité comme tout autre application affine, conserve, l'alignement, le parallélisme, les milieux ou plus généralement les barycentres. Inversement, des cordes conjuguées telles que $[MN]$ et $[M'N']$ sur la figure II.8, sont des transformées par affinité de diamètres perpendiculaires d'un cercle. Ces diamètres sont les médianes d'un carré tel que $PQRS$, leur transformation par affinité sont médianes du parallélogramme $P'Q'R'S'$, dont les côtés sont tangents à l'ellipse.

Si cette ellipse a pour petit axe $l = 2b$ et grand axe $L = 2a$, toujours dans le même repère évoqué plus haut, les points M, M' de l'ellipse sont tels que $\vec{OM} = a \cdot \cos t \vec{u} + b \cdot \sin t \vec{v}$ et $\vec{ON} = -a \cdot \sin t \vec{u} + b \cdot \cos t \vec{v}$,

- l'aire du parallélogramme $P'Q'R'S'$ est donc $4 \begin{vmatrix} a \cdot \cos t & -a \cdot \sin t \\ b \cdot \sin t & b \cdot \cos t \end{vmatrix} = 4ab = L \times l$.
- La somme des carrés des longueurs de 2 cordes conjuguées est constamment égale à

$$4OM^2 + 4ON^2 = 4a^2 + 4b^2 = L^2 + l^2$$

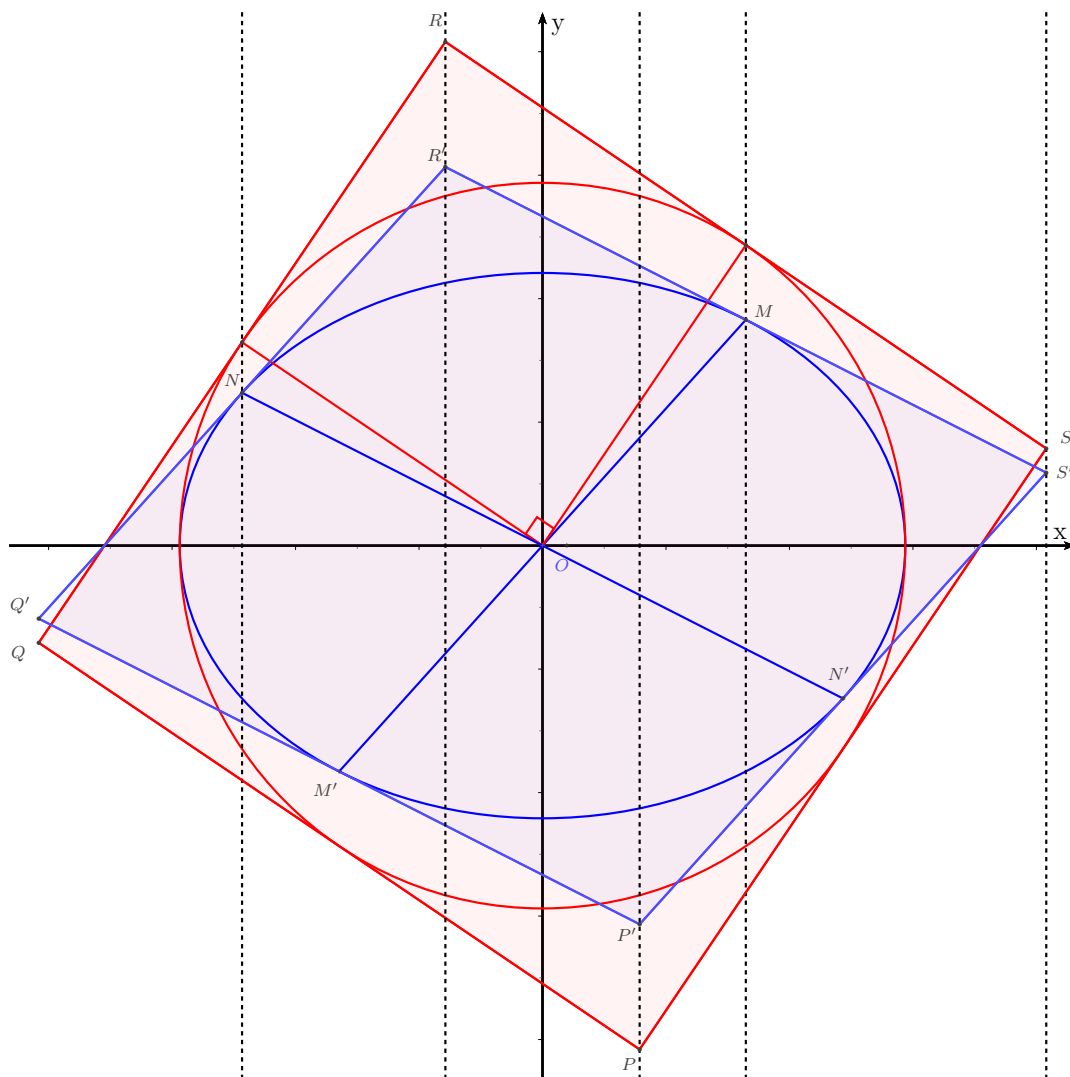


FIGURE II.8 – Illustration des théorèmes d'Appolonius.

- le produit des coefficients directeurs des cordes conjuguées est

$$\frac{b \cdot \sin t}{a \cdot \cos t} \times \frac{b \cdot \cos t}{a \cdot \sin t} = -\frac{b^2}{a^2} = -\frac{l^2}{L^2}$$

Si $a = b$, ces résultats qui constituent le deuxième théorème d'Appolonius, sont la généralisation de propriétés évidentes pour le cercle et des diamètres perpendiculaires de longueur $2a = 2b$. Les deux premiers résultats se retiennent facilement en remarquant leur évidence, quand les cordes conjuguées sont les deux axes.

THÉORÈME 2 *Étant donné une ellipse de grand axe L et petit axe l , 2 cordes conjuguées sont les médianes d'un parallélogramme de même centre que l'ellipse et dont les côtés lui sont tangents, de plus :*

- *Tous ces parallélogrammes ont la même aire : $L \times l$*
- *le produit des coefficients directeurs de deux cordes conjuguées différentes des axes, dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ tel que \vec{i} dirige le grand axe, est $-\frac{l^2}{L^2}$*
- *la somme des carrés des longueurs de ces cordes est $l^2 + L^2$*

4-3 Construction par les cercles de Chasles

La paramétrisation d'une ellipse par des fonctions trigonométriques, permet d'expliquer sa construction illustrée par la figure II.9, à l'aide des cercles de Chasles, ce sont deux cercles de centre O respectivement de rayons $a + b$ et $a - b$. On place sur le premier cercle, le point $J(\varphi)$ de coordonnées $((a + b) \cos \varphi; (a + b) \sin \varphi)$, et sur le deuxième cercle, le point $J'(\varphi)$ de coordonnées $((a - b) \cos(-\varphi); (a - b) \sin(-\varphi))$. Le milieu $A(\varphi)$ de $[J(\varphi)J'(\varphi)]$ a pour coordonnées $(a \cos \varphi; \sin \varphi)$, il décrit donc l'ellipse lorsque φ varie dans $]-\pi; \pi]$.

De plus $\overrightarrow{A(\varphi)J(\varphi)} = b \cos \varphi \vec{i} + a \sin \varphi \vec{j}$ est un vecteur normal à l'ellipse, car $\begin{cases} x'(t) = -a \sin t \\ y'(t) = b \cos t \end{cases}$ permet de voir que pour cette paramétrisation de l'ellipse, le vecteur vitesse à l'instant $t = \varphi$ est orthogonal à $\overrightarrow{A(\varphi)J(\varphi)}$, on dispose donc d'une deuxième méthode pour construire les tangentes et normales à une ellipse.

4-4 Construction par la méthode de la bande de papier

De la transformation par affinité on peut déduire une autre méthode de construction de l'ellipse, celle dite de la bande de papier (voir figure II.10).

Les extrémités A et B d'un segment (ou bande de papier) décrivent l'une l'axe des ordonnées et l'autre l'axe des abscisses, chaque point fixe du segment décrit alors une ellipse. En effet si M est un point du segment $[AB]$ tel que $MA = a$ et $MB = b$, alors M' tel que $\overrightarrow{OM'} = \overrightarrow{BM}$ décrit le cercle de centre O et rayon a . Le point P intersection de (PM) avec l'axe des abscisses, est centre d'homothétie pour les triangles PMB et $PM'O$, on a donc $\overrightarrow{PM} = k \cdot \overrightarrow{PM'}$ avec $k = -\frac{BM}{OM'} = -\frac{b}{a}$. Cela prouve que M décrit la courbe transformée du cercle principal de centre O et rayon a , par l'affinité qui multiplie les ordonnées par $-\frac{b}{a}$.

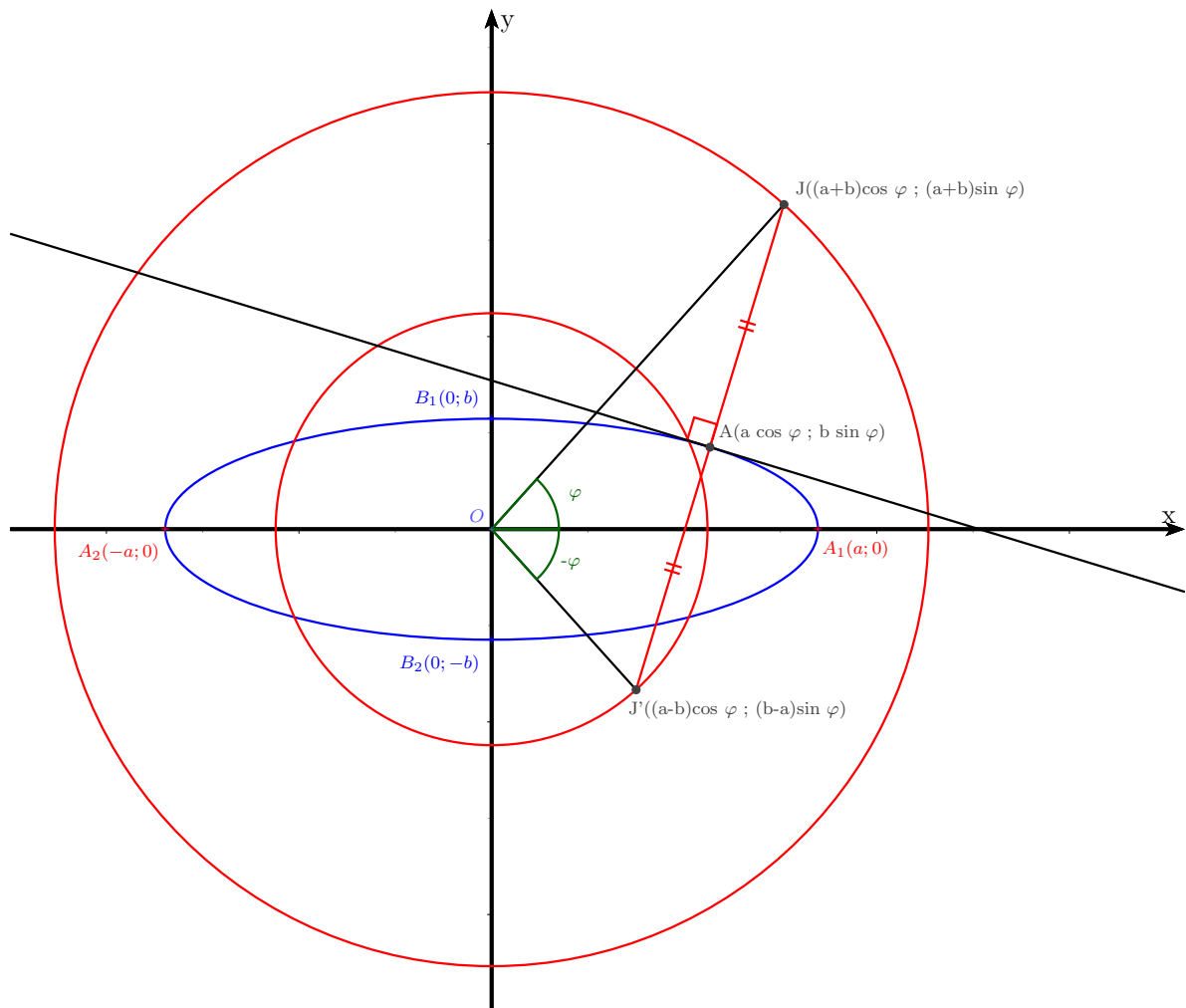


FIGURE II.9 – Cercles de Chasles de rayons $a + b$ et $a - b$.

II-5 Propriétés déduites de la définition par foyer, directrice et excentricité

5-1 Directrice et excentricité d'une ellipse

Dans la situation où l'ellipse était obtenue par section plane d'un cylindre (voir figure II.1), pour tout point M sur l'ellipse, on a $MM_i = MF_i = MH_i \cos \beta$ pour les deux indices $i = 1$ ou $i = 2$. Sur la figure II.2 avec une ellipse obtenue par section d'un cône, on a peut remarquer le même rôle particulier, joué par les 2 droites d_1 et d_2 obtenues par intersection du plan Π qui contient l'ellipse, avec les 2 plans parallèles \mathcal{P}_1 et \mathcal{P}_2 . Nous avons désigné ainsi, les 2 plans parallèles qui contiennent les cercles de contact, entre le cône ou le cylindre et les 2 sphères tangentes à la fois au plan \mathcal{P} et au cône ou au cylindre. Posons $\mathcal{D}_1 = \mathcal{P} \cap \mathcal{P}_1$ et $\mathcal{D}_2 = \mathcal{P} \cap \mathcal{P}_2$, étant donné un point M de l'ellipse, soit H_1 le projeté orthogonal M sur \mathcal{D}_1 et H_2 le projeté orthogonal M sur \mathcal{D}_2 . La droite (H_1H_2) qui est orthogonale à d_1 et d_2 dans le plan Π est parallèle à (SD) , car cette dernière droite est elle même orthogonale à d_1 et d_2 . Cette dernière orthogonalité se justifie par le fait que (SD) est située dans un plan perpendiculaire à Π , \mathcal{P}_1 , et \mathcal{P}_2 , ce plan et toutes ses droites sont donc orthogonaux à d_1 et d_2 . les distances M_1M_2 et H_1H_2 sont des constantes,

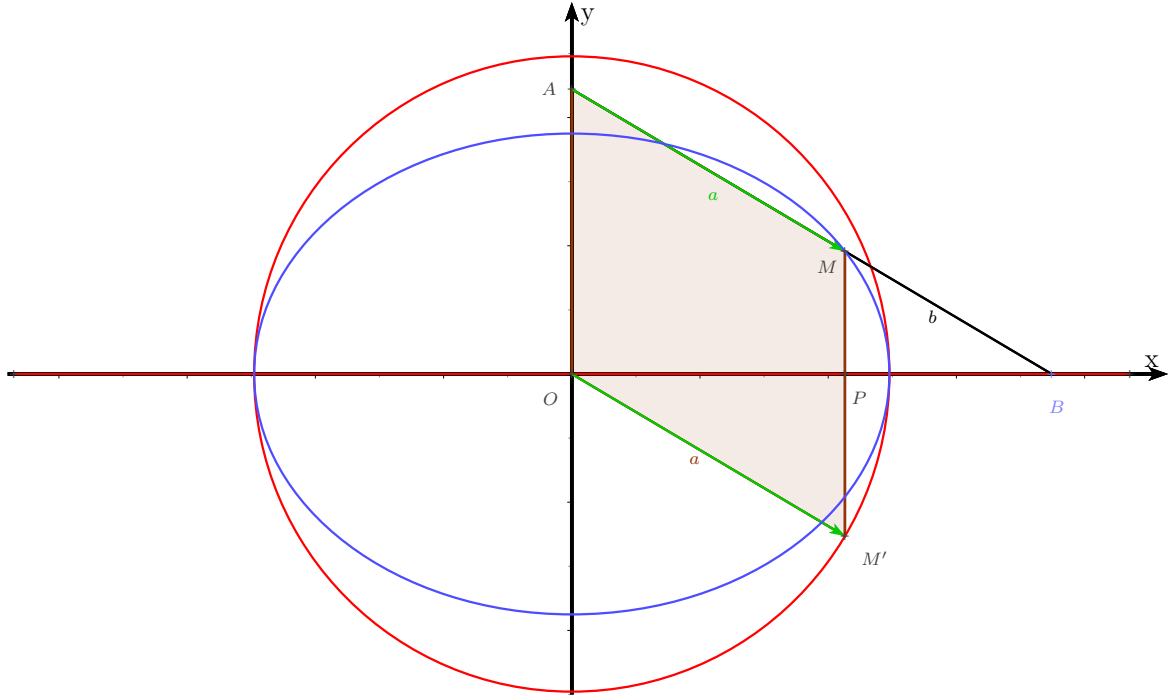


FIGURE II.10 – Construction de l'ellipse par la méthode de la bande de papier

qui permettent d'exprimer de plusieurs façons la distance d entre les 2 plans parallèles \mathcal{P}_1 et \mathcal{P}_2 : $d = H_1 H_2 \cos \beta = M_1 M_2 \cos \alpha$; on en déduit $\frac{M_1 M_2}{H_1 H_2} = \frac{\cos \beta}{\cos \alpha}$. Le parallélisme de $(H_1 M_1)$ et $(H_2 M_2)$ permet l'application du théorème de Thalès aux triangles $MM_1 H_1$ et $MM_2 H_2$ et d'établir l'égalité $\frac{MM_1}{MH_1} = \frac{MM_2}{MH_2} = \frac{M_1 M_2}{H_1 H_2}$ qui montre que :

$$\frac{MF_1}{MH_1} = \frac{MF_2}{MH_2} = \frac{\cos \beta}{\cos \alpha} < 1$$

pour tout $M \in \mathcal{E}$, car $MM_1 = MF_1$, $MM_2 = MF_2$ et $0 < \alpha < \beta < \frac{\pi}{2}$.

Ce nombre $e = \frac{\cos \beta}{\cos \alpha} \in]0; 1[$ est appelé excentricité de l'ellipse, en l'associant à un foyer et à la droite la plus proche de ce foyer parmi \mathcal{D}_1 ou \mathcal{D}_2 , on peut caractériser notre courbe de manière unique, ces droites \mathcal{D}_1 et \mathcal{D}_2 sont appelées directrices de l'ellipse.

On peut retrouver ces éléments caractéristiques d'une ellipse à partir de l'équation cartésienne. En reprenant les calculs du paragraphe II-3, qui nous ont permis d'établir une forme simplifiée de l'équation cartésienne de l'ellipse dans un repère bien choisi, on avait : $r_1 = MF_1 = a - \frac{cx}{a}$ et $r_2 = MF_2 = a + \frac{cx}{a}$. On a donc $r_1 = \frac{c}{a} \left(\frac{a^2}{c} - x \right)$ et $r_2 = \frac{c}{a} \left(\frac{a^2}{c} + x \right)$. les nombres $\frac{a^2}{c} \pm x$ sont les distances entre M et les droites d'équations $x = \pm \frac{a^2}{c}$ que nous avons

représentées en vert sur la figure II.11, ici l'excentricité e s'exprime par le rapport $\frac{c}{a} = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}$; s'agissant d'un cercle nous aurions donc une excentricité nulle, et des directrices rejetées à l'infini.

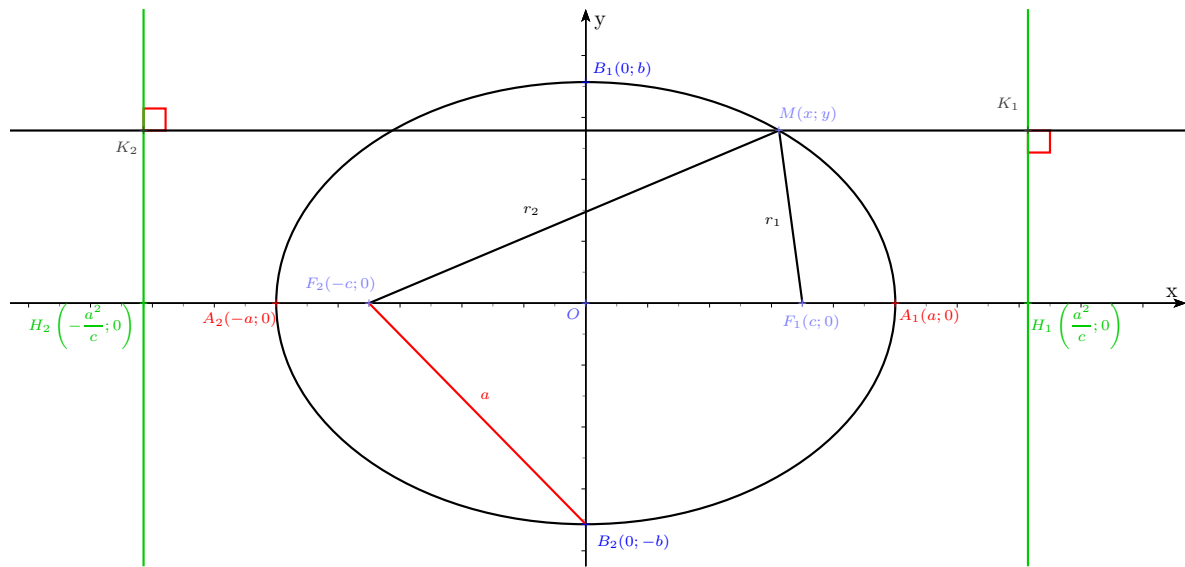


FIGURE II.11 – Droites directrices d'une l'ellipse.

5-2 Définition par foyer, directrice et excentricité

L'excentricité et les directrices d'une ellipse définie dans le paragraphe précédent permettent de proposer une 3^e définition de l'ellipse, nous montrerons qu'elle est équivalente aux précédentes, en retrouvant les foyers et le diamètre maximum de la courbe ainsi définie.

DÉFINITION 6 *Dans un plan euclidien Π , étant donné un point F_1 appelé foyer, une droite d_1 appelée directrice ne contenant pas F_1 et un réel $e \in]0; 1[$ appelé excentricité, l'ensemble des points M tels que $MF_1 = e.MK_1$ où K_1 est le projeté orthogonal de M sur d_1 , est une ellipse.*

Montrons d'abord que cet ensemble de points admet un centre O de symétrie, ce qui nous permettra d'affirmer l'existence d'un deuxième couple foyer, directrice, symétrique du premier par rapport à O , qui permet de définir le même ensemble de points. Soit H_1 le projeté de F_1 sur d_1 et h la distance F_1H_1 . On se place dans un repère orthonormé (H_1, \vec{i}, \vec{j}) tel que $\vec{i} = \frac{\vec{H_1F_1}}{H_1F_1}$; h est alors l'abscisse du foyer et \vec{j} est un vecteur directeur de d_1 .

Dans ce repère étant donné un point $M(x; y)$, on a $MF_1^2 = (x - h)^2 + y^2$ et $MK_1 = |x|$, pour être dans l'ensemble de points que nous venons de définir, il doit vérifier l'équation :

$$(x - h)^2 + y^2 = (ex)^2 \iff (1 - e^2)x^2 - 2hx + y^2 + h^2 = 0$$

Pour y fixé, le discriminant réduit de cette équation en x est $\Delta = h^2 - (1 - e^2)(y^2 + h^2) = e^2h^2 - (1 - e^2)y^2$, étant donné que $h > 0$ et $e \in]0; 1[$, Δ est positif si et seulement si $|y| \leq \frac{he}{\sqrt{1 - e^2}}$.

Dans ces conditions, on a $x = \frac{h \pm \sqrt{\Delta}}{1 - e^2} \in \left[\frac{h}{1 + e}; \frac{h}{1 - e} \right]$, les bornes sont atteintes par x lorsque $\sqrt{\Delta}$ atteint son maximum he pour $y = 0$. Pour tout réel y tel que $|y| \leq \frac{he}{\sqrt{1 - e^2}}$, on a donc toujours deux paires de points de même ordonnée $\pm y$ sur notre courbe, dont la moyenne des d'abscisses est $\frac{h}{1 - e^2}$. L'ensemble de points \mathcal{E} que nous venons de définir, possède donc deux

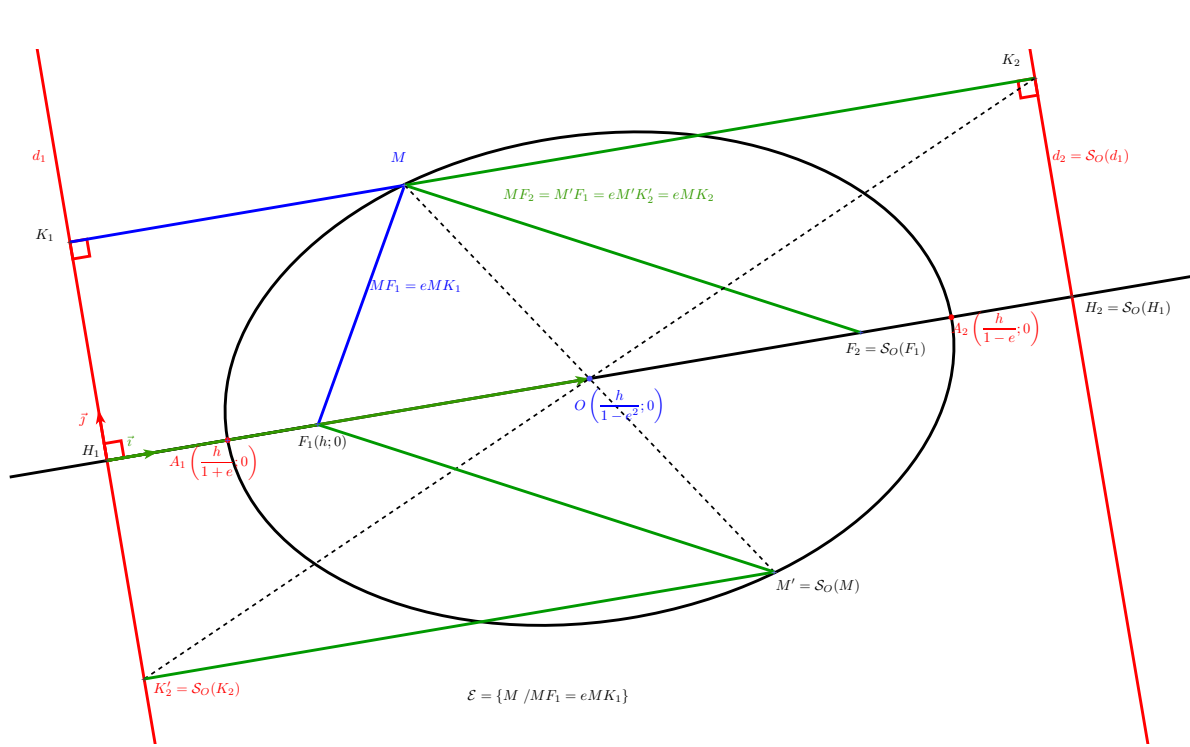


FIGURE II.12 – Ellipse définie par le foyer F_1 , la directrice d_1 et l'excentricité $e = \frac{3}{4}$.

axes de symétrie : l'axe des abscisses et l'axe d'équation $x = \frac{h}{1-e^2}$, le point $O\left(\frac{h}{1-e^2}; 0\right)$ est donc centre de symétrie. On peut donc obtenir un deuxième foyer F_2 et une deuxième directrice d_2 symétriques respectifs de F_1 et d_1 par rapport à O , tels que l'on ait aussi $MF_2 = eMK_2$, où K_2 est le projeté orthogonal de M sur d_2 . Cette dernière égalité se justifie par le fait que, si $M \in \mathcal{E}$, alors $M' = \mathcal{S}_O(M)$ doit aussi appartenir à \mathcal{E} et vérifie $M'F_1 = eM'K'_2$, où K'_2 est le projeté orthogonal de M' sur d_1 . on en déduit $MF_2 = eMK_2$ par symétrie par rapport au point O , puis $MF_1 + MF_2 = e(MK_1 + MK_2)$. Dans le repère que nous avons choisi tous les points ont une abscisse positive, et en particulier tous les points de la droite d_2 symétrique de l'axe des ordonnées par rapport à O ont une abscisse maximum. On en déduit que M est sur le segment $[K_1K_2]$ et que $MK_1 + MK_2 = K_1K_2 = H_1H_2$, la somme $MF_1 + MF_2$ est donc égale à la constante eH_1H_2 . Nous retrouvons selon la définition 3, une ellipse de foyers F_1 et F_2 , son diamètre maximum est $eH_1H_2 = 2eOH_1 = \frac{2he}{1-e^2}$, ses sommets sont les points $A_1\left(\frac{h}{1+e}; 0\right)$ et $A_2\left(\frac{h}{1-e}; 0\right)$.

On pourrait aussi définir l'ellipse par l'un des trois moyens suivants :

- par ses deux directrices et son excentricité,

puisque dans cette situation la distance $H_1H_2 = \frac{2h}{1-e^2}$ entre les deux directrices est

connue, on peut calculer $h = \frac{(1-e^2)H_1H_2}{2}$ qui permet de déterminer l'emplacement des foyers ;

- par ses deux foyers et ses deux directrices,

ces quatre éléments étant connus, on peut retrouver l'excentricité $e = \sqrt{\frac{F_1F_2}{H_1H_2}}$;

- par ses deux foyers et son excentricité,
dans cette situation on peut retrouver le diamètre maximum $A_1A_2 = \frac{F_1F_2}{e}$.

5-3 Équation en coordonnées polaires

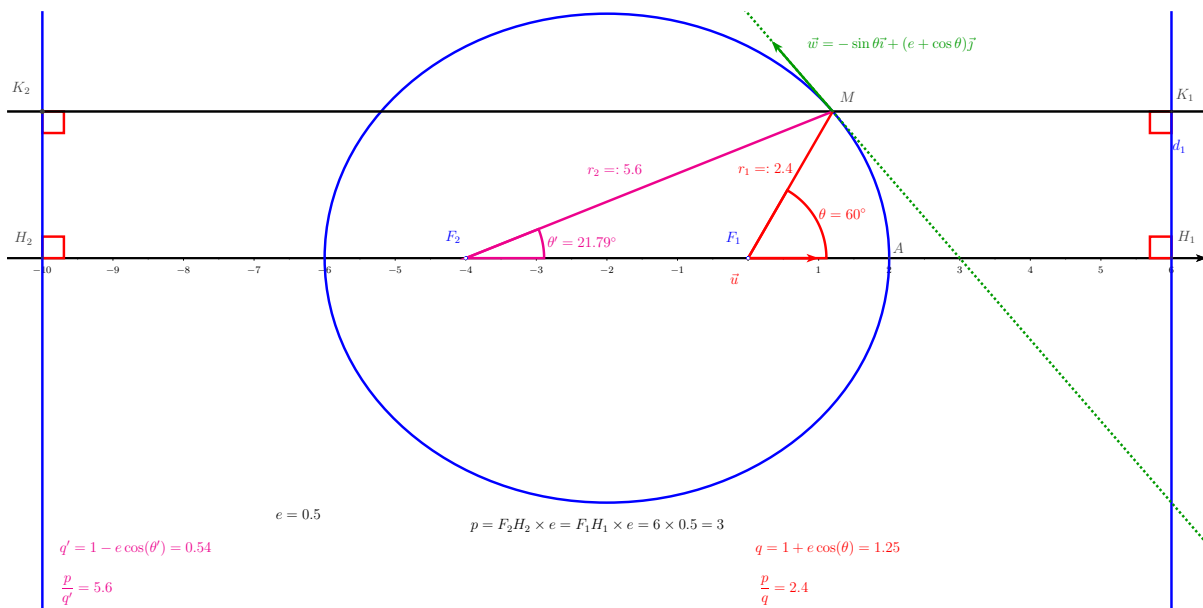


FIGURE II.13 – Ellipse de foyer F_1 , directrice d_1 d'excentricité $e = \frac{1}{2}$ et paramètre $p = 3$.

Étant donné l'ellipse \mathcal{E} de foyer F_1 , directrice d_1 et excentricité $e \in]0 ; 1[$, elle possède une équation en coordonnées polaires relativement simple dans le repère orthonormé direct (F_1, \vec{u}, \vec{v}) , où \vec{u} est le vecteur unitaire orthogonal à la directrice, dont on a choisi le sens allant du foyer vers la directrice. (voir figure II.13). Pour exprimer cette équation le plus simplement possible, posons $h = H_1F_1$ où H_1 est le projeté orthogonal de F_1 sur d_1 , et pour tout point M du plan nous ne considérerons dans le repère (F_1, \vec{u}, \vec{v}) , que des coordonnées polaires $[r, \theta] \in]0 ; +\infty[\times [0 ; 2\pi[$, telles qu'en particulier r soit toujours positif. Soit K_1 le projeté orthogonal de M sur d_1 , on a $MK_1 = |x_{K_1} - x_M| = |h - r \cos \theta|$

- si M de coordonnées polaires $[r, \theta]$ est dans le demi-plan de frontière d_1 contenant F_1 , on a $MK_1 = h - r \cos \theta$.
- si M de coordonnées polaires $[r, \theta]$ est dans le demi-plan de frontière d_1 qui ne contient pas F_1 , on a $MK_1 = r \cos \theta - h$.

Dans le premier cas pour que M appartienne à \mathcal{E} il faut et il suffit que

$$MF_1 = e.MK_1 \quad \Leftrightarrow \quad r = e(F_1H_1 - r \cos \theta) \quad \Leftrightarrow \quad r = \frac{he}{1 + e \cos \theta}$$

L'excentricité e d'une ellipse étant un réel strictement plus petit que 1, on peut remarquer que dans cette dernière égalité r est bien un réel strictement positif défini pour tout $\theta \in [0 ; 2\pi[$.

Dans le deuxième cas pour que M appartienne à \mathcal{E} , il faudrait que $r = e(r \cos \theta - h) \Leftrightarrow r = \frac{-he}{1 - e \cos \theta}$, pour $h > 0$ et $e \in]0 ; 1[$, ce calcul aboutit à $r < 0$, aucun point de coordonnées

polaires $[r, \theta] \in]0; +\infty[\times [0; 2\pi[$ avec $r \cos \theta > h$ ne peut donc appartenir à \mathcal{E} dans ce cas. Pour tout $\theta \in [0; 2\pi[$, il existe un seul point de l'ellipse sur la demi droite d'origine F_1 dirigée par le vecteur $\cos \theta \vec{u} + \sin \theta \vec{v}$. Ceci nous conduit à adopter l'équation suivante en coordonnées polaires pour une ellipse, dans un repère admettant un foyer pour origine et dont le premier vecteur unité est dirigé vers le sommet de l'ellipse le plus proche :

$$r = \frac{p}{1 + e \cos \theta} \quad p = eh \text{ est appelé paramètre de l'ellipse.}$$

Si on opte pour un 1^{er} vecteur unité opposé du précédent en le dirigeant d'un foyer vers le sommet le plus éloigné, cela revient à additionner π à l'angle polaire, après ce changement de variable l'équation devient : $r = \frac{p}{1 - e \cos \theta}$. On obtient cette autre forme d'équation polaire en prenant par exemple le repère (F_2, \vec{u}, \vec{v}) , où F_2 est le 2^e foyer de l'ellipse. Dans cette situation, soit respectivement H_2 et K_2 les projetés orthogonaux de F_2 et M sur la 2^e directrice d_2 (voir figure II.13), pour que M de coordonnées polaires $[r, \theta]$ par rapport à ce nouveau repère, soit sur l'ellipse on a nécessairement $MK_2 = H_2F_2 + r \cos \theta$ et on aboutit au calcul

$$MF_2 = e.MK_2 \quad \Leftrightarrow \quad r = e(h + r \cos \theta) \quad \Leftrightarrow \quad r = \frac{he}{1 - e \cos \theta}$$

On peut utiliser l'une de ces équations en coordonnées polaires, pour former une représentation paramétrique, dans le repère orthonormé direct (F_1, \vec{u}, \vec{v}) , avec $\theta \in]-\pi; \pi]$:

$$\begin{cases} x(\theta) = \frac{p \cos \theta}{1 + e \cos \theta} \\ y(\theta) = \frac{p \sin \theta}{1 + e \cos \theta} \end{cases} \quad \text{donc} \quad \begin{cases} x'(\theta) = \frac{-p \sin \theta}{(1 + e \cos \theta)^2} \\ y'(\theta) = \frac{p \cos \theta + pe}{(1 + e \cos \theta)^2} \end{cases}$$

On voit ainsi que le vecteur $\vec{w} = -\sin \theta \vec{u} + (e + \cos \theta) \vec{v}$ que nous avons représenté sur la figure II.13, dirige la tangente à l'ellipse en un point $M((x(\theta); y(\theta)))$. Cela nous permet de déterminer une équation cartésienne dans le repère orthonormé (F_1, \vec{u}, \vec{v}) , de la tangente à l'ellipse en ce point de la forme $(e + \cos \theta)x + \sin \theta y = c$, qui doit être vérifiée par $(x(\theta); y(\theta))$, donc :

$$c = \frac{p \cos \theta (e + \cos \theta) + p \sin^2 \theta}{1 + e \cos \theta} = \frac{p(e \cos \theta + \cos^2 \theta + \sin^2 \theta)}{1 + e \cos \theta} = p$$

La tangente en $M(\theta)$ admet donc pour équation cartésienne dans le repère orthonormé (F_1, \vec{u}, \vec{v}) :

$$(e + \cos \theta)x + \sin \theta y = p$$

5-4 Tangentes et directrices

En utilisant le repère (F_1, \vec{u}, \vec{v}) et la représentation paramétrique du paragraphe 5-3, les tangentes à une ellipse en des points $M(\theta)$ et $M(\theta + \pi)$ qui sont extrémités d'une corde qui passe par son foyer F_1 , admettent pour équations cartésiennes dans ce repère :

$$(e + \cos \theta)x + (\sin \theta)y = p \quad \text{et} \quad (e - \cos \theta)x - (\sin \theta)y = p$$

Elles se coupent donc en un point de coordonnées $\left(\frac{p}{e}; -\frac{p \cos \theta}{e \sin \theta}\right)$, or $\frac{p}{e} = h$ est l'abscisse de la directrice d_1 (voir figure II.13). De plus d'après le 1^{er} théorème de Poncelet que nous allons démontrer dans le paragraphe 6-1suivant, ces tangentes sont telles que $\widehat{MF_1I} = \widehat{IF_1M'}$, ces angles sont donc droits; on en déduit ce théorème illustré par la figure II.14.

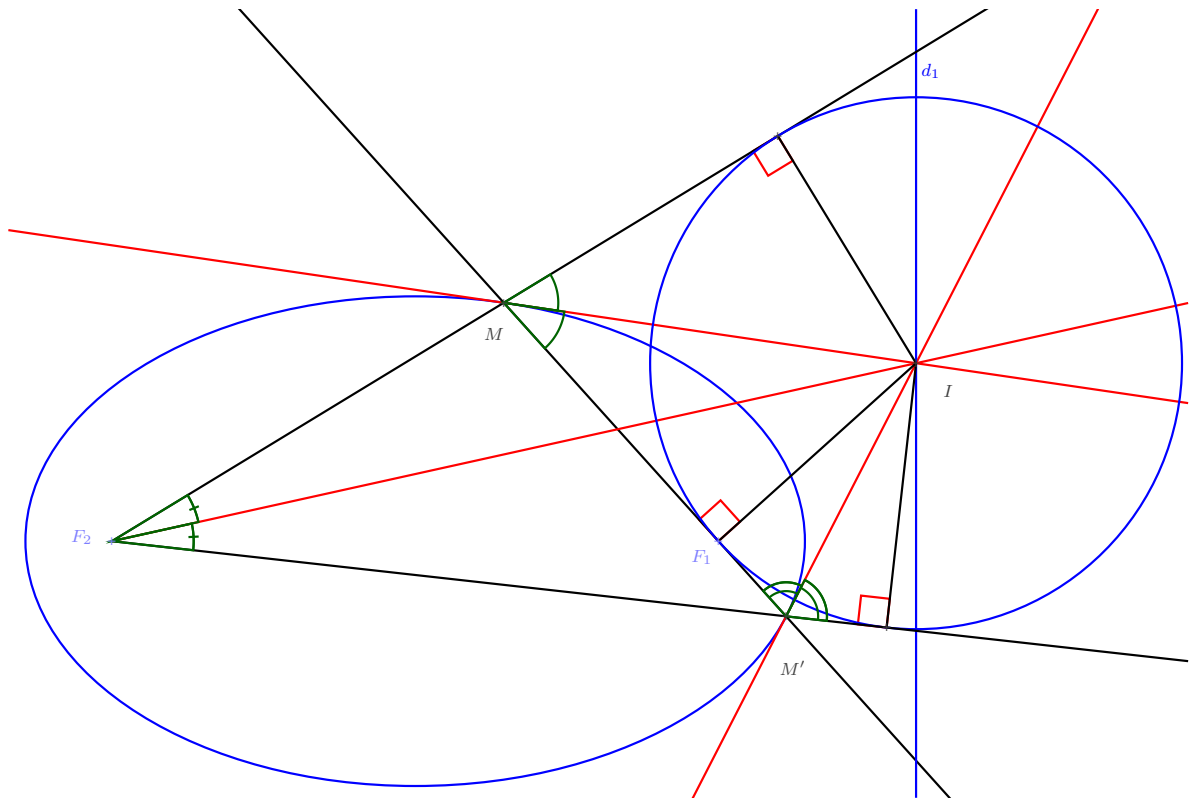


FIGURE II.14 – Tangentes à une ellipse en les extrémités d’une corde passant par un foyer

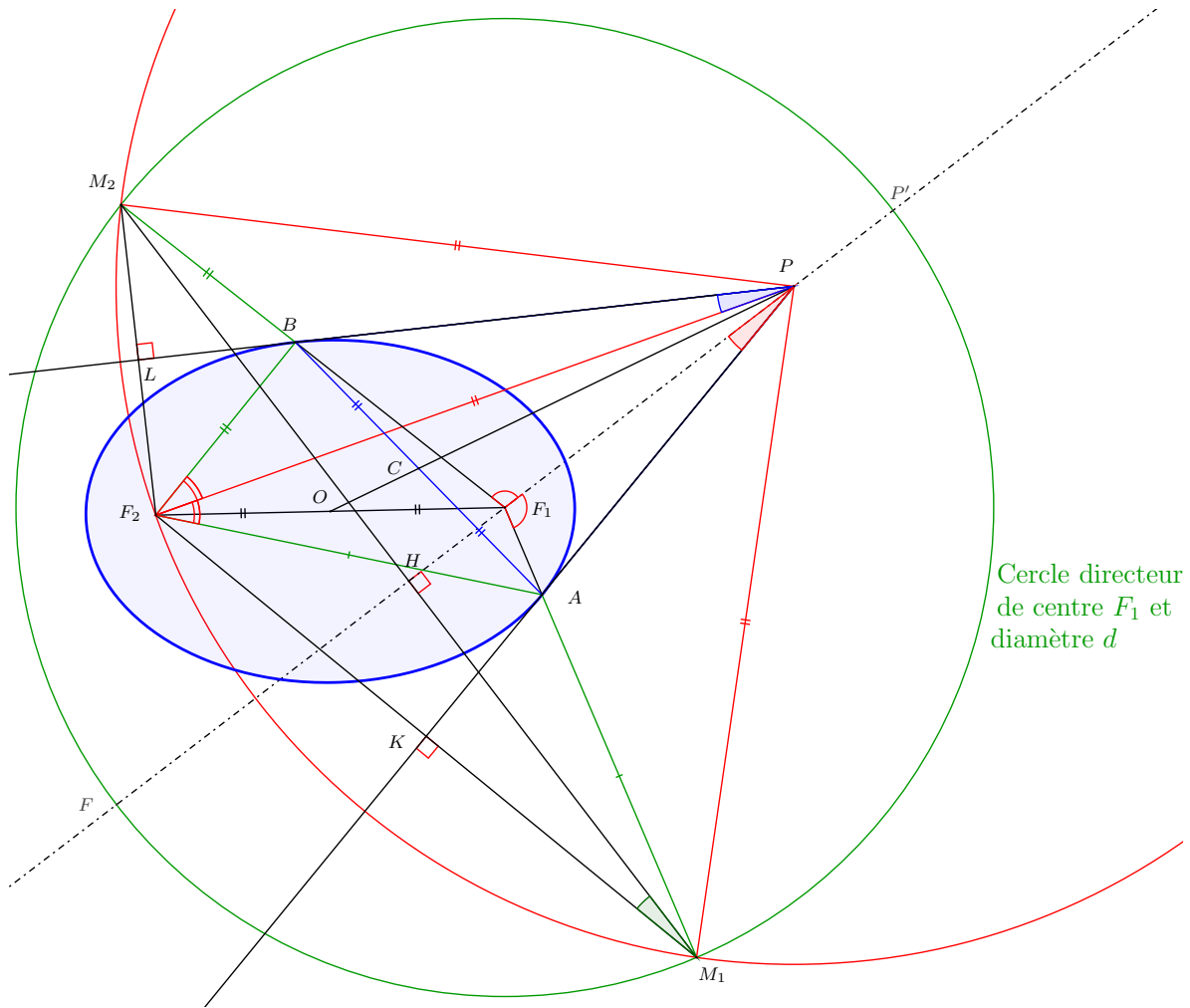
THÉORÈME 3 *Étant donné une corde $[MM']$ d’une ellipse admettant F pour foyer, si $F \in [MM']$, alors les tangentes à l’ellipse en M et M' se coupent sur la directrice relative à F , en un point I dont le projeté orthogonal sur la corde $[MM']$ est le foyer F .*

On peut remarquer aussi que les tangentes étant 2 bissectrices extérieures du triangle MF_2M' , leur point d’intersection I est centre d’un cercle exinscrit à ce triangle, tangent à (MM') en F_1 . Connaissant les deux foyers, cela fournit un moyen de construction des directrices d’une ellipse.

II-6 Propriétés des tangentes à une ellipse

6-1 Premier théorème de Poncelet

Nous avons vu en 2-4 que la construction des points d’une ellipse par ses cercles directeurs, permet de mettre en évidence des droites tangentes à cette ellipse. Étant donné un point P quelconque, on se propose de construire des droites tangentes à l’ellipse passant par P . On doit donc retrouver des points M d’un cercle directeur de rayon $d > F_1F_2$, celui de centre F_1 par exemple, tel que P soit sur la médiatrice de $[F_2M]$. Les seuls points ayant cette propriété sont deux points M_1 et M_2 , obtenus par intersection du cercle directeur et du cercle \mathcal{C} de centre P passant par F_2 , afin d’avoir $PF_2 = PM_1 = PM_2$. Pour que ces points existent, on doit donc avoir $d = F_1M_i \leq F_1P + PM_i = F_1P + PF_2$, cela signifie que P est nécessairement à l’extérieur de l’ellipse. Réciproquement supposons $PF_1 + PF_2 > d$



Cercle directeur de centre F_1 et diamètre d

FIGURE II.15 – Illustration des 3 théorèmes de Poncelet dans le cas d’une ellipse.

- Si P centre de \mathcal{C} est à l’extérieur du cercle directeur, il est évident que ces deux cercles sont sécants puisque \mathcal{C} doit passer par F_2 à l’intérieur du cercle directeur.
- Si P est à l’intérieur du cercle directeur, considérons le point P' sur ce cercle tel que $P \in [F_1P']$, on a $PP' = d - PF_1 < PF_2$. Il existe donc un point du cercle de centre P et rayon PF_2 sur la demi-droite $[PP')$ à l’extérieur du cercle directeur.

Dès que $PF_1 + PF_2 > d$, quelque soit l’une des deux situations envisagées ci-dessus, on est donc assuré que \mathcal{C} et le cercle directeur sont sécants. Il existe donc des points de l’ellipse tels que A et B sur la figure II.15, qui vérifient $AF_2 + AF_1 = AM_1 + AF_1 = d$ et $BF_2 + BF_1 = BM_2 + BF_1 = d$. Nous avons expliqué en 2-4, pourquoi les médiatrices de $[F_2M_1]$ et $[F_2M_2]$ étaient tangentes à l’ellipse. La droite (PF_1) qui passe par le centre du cercle directeur et le centre du cercle \mathcal{C} que nous venons de tracer, est axe de symétrie des deux cercles. On en déduit l’égalité entre angles de vecteurs $\left[\overrightarrow{F_1A}, \overrightarrow{F_1P} \right] = \left[\overrightarrow{F_1P}, \overrightarrow{F_1B} \right]$, et puisque les foyers jouent des rôles interchangeables, on a de même l’égalité $\left[\overrightarrow{F_2A}, \overrightarrow{F_2P} \right] = \left[\overrightarrow{F_2P}, \overrightarrow{F_2B} \right]$. On énonce donc ainsi le 1^{er} théorème de Poncelet :

THÉORÈME 4 (1^{ER} THÉORÈME DE PONCELET) *Étant donné un point P extérieur à une ellipse*

ℰ, il existe deux points A et B sur ℰ tels que les droites (PA) et (PB) soient tangentes à cette ellipse. Si F est l'un des foyers de ℰ, alors la droite (FP) est bissectrice intérieure de l'angle \widehat{AFB} .

À la manière ancienne, ce théorème était énoncé ainsi : les 2 segments issus d'un même point extérieur à une ellipse, et tangents en leurs autres extrémités à cette ellipse, sont vus de l'un quelconque des 2 foyers sous des angles égaux. Ce théorème généralise ce qui est un évidence pour un cercle lorsque F_1 et F_2 sont confondus avec le centre du cercle.

6-2 Isogonalité et deuxième théorème de Poncelet

L'angle entre droites $[(M_1F_2), (M_1M_2)]$ marqué en vert sur la figure II.15 est inscrit² dans le cercle \mathcal{C} de centre P , sa mesure est égale modulo π , à la moitié de la mesure l'angle au centre entre vecteurs $[\overrightarrow{PF_2}, \overrightarrow{PM_2}]$. Or (PB) est bissectrice de la paire de droites $\{(PF_2), (PM_2)\}$, les angles de droites $[(PF_2), (PB)]$ marqué en bleu sur la figure II.15 et l'angle $[(M_1F_2), (M_1M_2)]$ ont donc les mêmes mesures modulo π . Mais Les angles de droites $[(PK), (PH)]$ marqué en rouge sur la figure II.15 et $[(M_1K), (M_1H)]$ sont des angles égaux, car les points M_1, H, K et P appartiennent au même cercle de diamètre $[PM_1]$. On peut donc enchaîner les égalités : $[(PA), (PF_1)] = [(PK), (PH)] = [(M_1K), (M_1H)] = [(M_1F_2), (M_1M_2)] = [(PF_2), (PB)]$. L'égalité remarquable $[(PA), (PF_1)] = [(PF_2), (PB)]$ s'exprime en disant que les foyers F_1 et F_2 sont isogonaux³ par rapport aux droites (PA) et (PB) . ce qui signifie que les paires de droites $\{(PF_1), (PF_2)\}$ et $\{(PA), (PB)\}$ admettent les mêmes bissectrices ou axes de symétries.

THÉORÈME 5 (2^e THÉORÈME DE PONCELET) *Étant donné une ellipse de foyers F_1, F_2 dont la distance entre les deux sommet est $d \in]F_1F_2; +\infty[$, pour tout point P tel que $PF_1 + PF_2 > d$, il existe deux droites d_1 et d_2 passant par P tangentes à l'ellipse, telles que les foyers sont sur des droites isogonales par rapport à la paire de droites $\{d_1, d_2\}$.*

Ce théorème généralise encore ce qui est un évidence pour un cercle, lorsque A et B sont les points de contacts entre un cercle de centre O et des droites tangentes à ce cercle, issues d'un même point P . il est très simple de vérifier que (OP) est la bissectrice de l'angle \widehat{AOB} , de plus cette droite passe par le milieu de $[AB]$. Comme dans les deux théorèmes de Poncelet précédents, cette dernière propriété peut aussi se généraliser à une ellipse.

6-3 Troisième théorème de Poncelet

THÉORÈME 6 (3^e THÉORÈME DE PONCELET) *Si deux demi-droites issues d'un même point P sont tangentes à une ellipse de centre O milieu des 2 foyers, alors la droite (PO) passe par le milieu des deux points de contact entre l'ellipse et les demi-droites.*

On montre cette propriété à l'aide de l'affinité \mathcal{A} qui transforme l'ellipse en son cercle principal (voir paragraphe II-4). On a $\mathcal{A}(O) = O$, soient $A' = \mathcal{A}(A)$, $B' = \mathcal{A}(B)$ et $P' = \mathcal{A}(P)$, les droites (PA) , (PB) et (PO) sont donc transformées respectivement par l'application affine \mathcal{A} en les droites $(P'A')$, $(P'B')$ et $(P'O)$. De plus les droites $(P'A')$ et $(P'B')$ doivent être tangentes en A' et B' au cercle principal image de l'ellipse par \mathcal{A} . Puisque O est aussi le centre de ce cercle,

2. Le théorème de l'angle inscrit est redémontré en annexe A-2 page 149, en précisant les notions d'angles de droites dont la mesure est définie modulo π .

3. Les notions d'isogonalité sont abordées de manière plus précises au paragraphe V-5.

la droite $(P'O)$ passe donc par le milieu de $[A'B']$. Étant donné que toute application affine conserve les milieux, on peut en déduire que $(P'O)$ passe par $\mathcal{A}(C)$ où C est le milieu de $[AB]$; en utilisant l'affinité inverse \mathcal{A}^{-1} , on voit que la droite (PO) passe aussi par le milieu C de $[AB]$.

Une autre preuve obtenue à partir des équations des tangentes à une conique, est fournie en fin de paragraphe III-4-1, cette démonstration mieux adaptée pour l'hyperbole, est entièrement réutilisable pour l'ellipse. Nous verrons en effet en fin de chapitre IV que les théorèmes de Poncelet concernent les trois types de coniques, ils permettront en particulier d'expliquer comment obtenir une conique tangente aux droites qui supportent les trois côtés d'un triangle non aplati, nous allons commencer à étudier ce problème pour l'ellipse.

6-4 Ellipse inscrite ou exinscrite dans un triangle

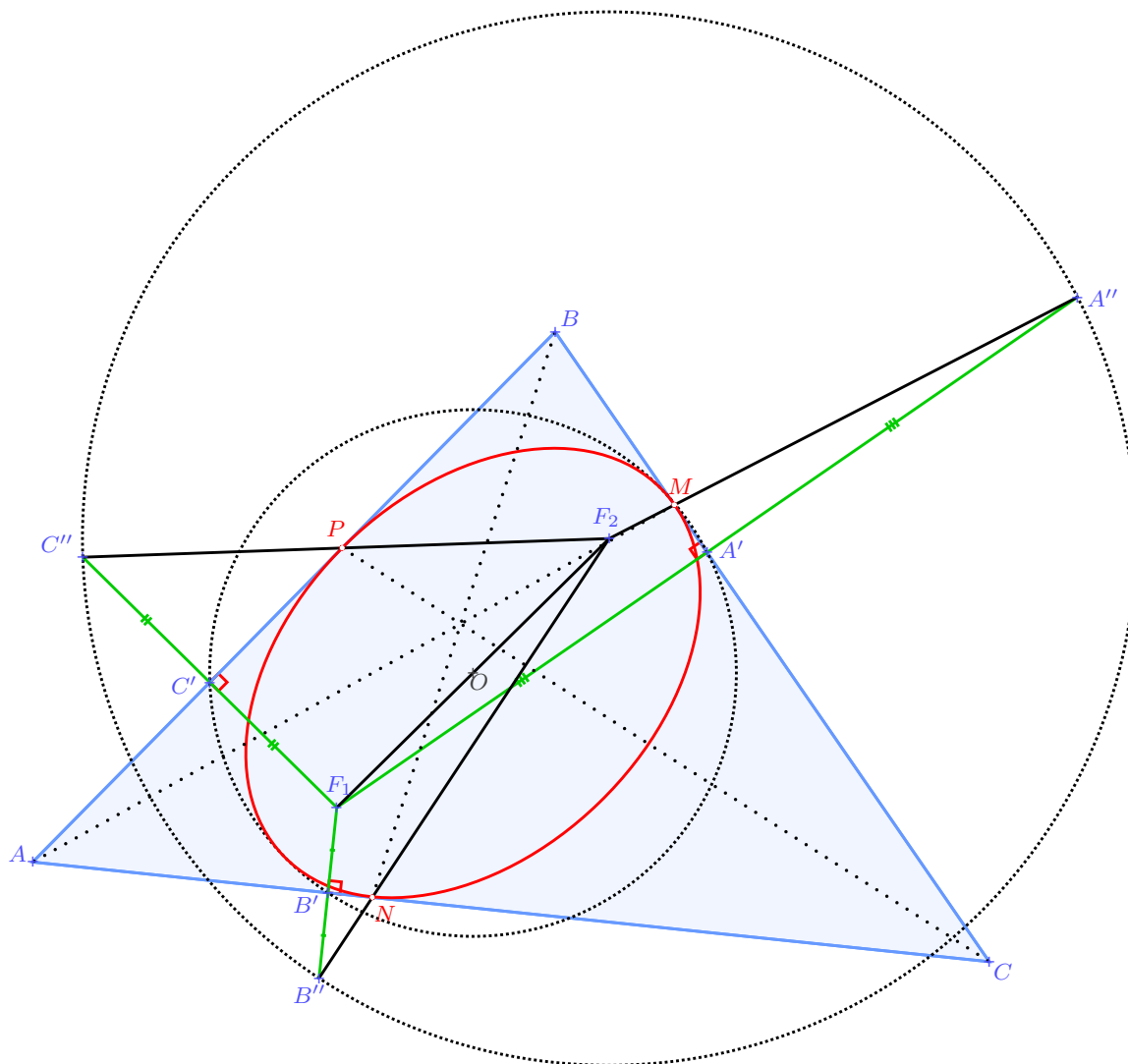


FIGURE II.16 – Ellipse inscrite dans ABC lorsque F_1 est à l'intérieur du triangle.

Étant donné un triangle, posons nous le problème de construire une ellipse tangente aux trois côtés du triangle. En observant la figure II.6, il apparait que le projeté orthogonal d'un

foyer F_1 sur une tangente à l'ellipse, doit être sur le cercle homothétique du cercle directeur centré sur l'autre foyer, dans une homothétie de centre F_1 et rapport $\frac{1}{2}$. Cet homothétique du cercle directeur est précisément le cercle principal centré sur le milieu des deux foyers, passant par les sommets de l'ellipse.

Dans un premier temps fixons arbitrairement un point F_1 , susceptible d'être un foyer de l'ellipse recherchée, les 3 projetés orthogonaux sur les côtés du triangle doivent donc être sur le cercle principal de l'ellipse recherchée. Il est donc nécessaire que les trois projetés ne soient pas alignés, pour pouvoir construire le cercle circonscrit au triangle qui admet ces trois points pour sommets. Le deuxième foyer F_2 de l'ellipse est alors nécessairement le symétrique de F_1 par rapport au centre de ce cercle, on peut aussi le construire comme centre du cercle circonscrit aux trois symétriques de F_1 par rapport aux côtés du triangle. Mais il faut que ces foyers soient à l'intérieur de ce cercle, pour être assuré de pouvoir construire une ellipse l'admettant ce cercle directeur. Si c'est le cas, comme dans les figures II.16 et V.21 le procédé de construction utilisé au paragraphe 2-3, permet de construire une ellipse de foyer F_1 et F_2 , dont on est assuré que les côtés du triangle sont les supports de droites tangentes à cette ellipse. En effet, lorsque F_1 est à l'intérieur du cercle \mathcal{C} circonscrit aux trois points A' , B' et C' , projetés orthogonaux de F_1 respectivement sur (BC) , (AC) et (AB) , on peut toujours construire une ellipse admettant F_1 pour foyer, dont le cercle directeur est l'homothétique de \mathcal{C} par l'homothétie \mathcal{H} de centre F_1 et rapport 2. Si O est le centre de \mathcal{C} , $F_2 = \mathcal{H}(O)$ sera centre du cercle directeur et deuxième foyer de l'ellipse. Les points $A'' = \mathcal{H}(A')$, $B'' = \mathcal{H}(B')$ et $C'' = \mathcal{H}(C')$ sont sur le cercle directeur, les médiatrices de $[F_1A'']$, $[F_1B'']$ et $[F_1C'']$, permettent donc d'obtenir trois tangentes à l'ellipse (voir 2-4), or ces médiatrices sont précisément par construction, les supports des 3 côtés du triangle.

Ce procédé de construction fournit bien l'ellipse recherchée, mais il nous faudra élucider à quelles conditions F_1 est à l'intérieur du cercle circonscrit à $A''B''C''$ pour pouvoir construire effectivement une ellipse. Cela sera fait en V-6, lorsque nous aurons achevé l'étude des 3 types de coniques non dégénérées, nous verrons alors quel doit être l'emplacement de F_1 pour que la conique recherchée soit une ellipse, pour tous les autres emplacements du foyer fixé par avance, la conique tangente aux trois côtés du triangle pourrait être une hyperbole ou bien une parabole. Nous montrerons de plus au paragraphe V-7-3 que les trois droites qui passent chacune, par un sommet du triangle et le point de contact entre la conique et la droite qui passe par les deux autres sommets, sont concourantes ou parallèles entre elles. Pour l'ellipse de la figure II.16, on peut constater que les droites (AM) , (BN) et (CP) sont concourantes.

6-5 Cercle orthoptique

Le lieu des sommets des angles droits circonscrits à une ellipse, c'est à dire l'ensemble des points P pour lesquels, les deux droites tangentes à l'ellipse issues de ce point sont perpendiculaires, est un cercle, comme le prouve le calcul suivant. En reprenant les points de la figure II.15, \widehat{APB} est droit si et seulement si $\widehat{M_1PM_2}$ est plat, dans cette situation, P aligné avec M_1 et M_2 est donc sur l'axe radical⁴ du cercle directeur de centre F_1 et du cercle \mathcal{C} de centre P passant par F_2 ; on appelle ainsi la droite où se situent tous les points ayant même puissance par rapport à ces deux cercles. Le calcul de la puissance de P par rapport à ces 2 cercles nous fournit

4. Voir annexe A-5 en page 156, pour plus de précisions sur la notion d'axe radical et de puissance d'un point par rapport à un cercle

donc l'égalité : $PF_1^2 - d^2 = -PF_2^2$, en reprenant les notations habituelles : $a = \frac{d}{2}$, $c = \frac{F_1F_2}{2}$ et $a^2 + b^2 = c^2$, on obtient :

$$4a^2 = PF_1^2 + PF_2^2 = (\overrightarrow{PO} + \overrightarrow{OF_1})^2 + (\overrightarrow{PO} + \overrightarrow{OF_2})^2 = 2PO^2 + 2c^2$$

On en déduit : $OP^2 = 2a^2 - c^2 = a^2 + b^2$.

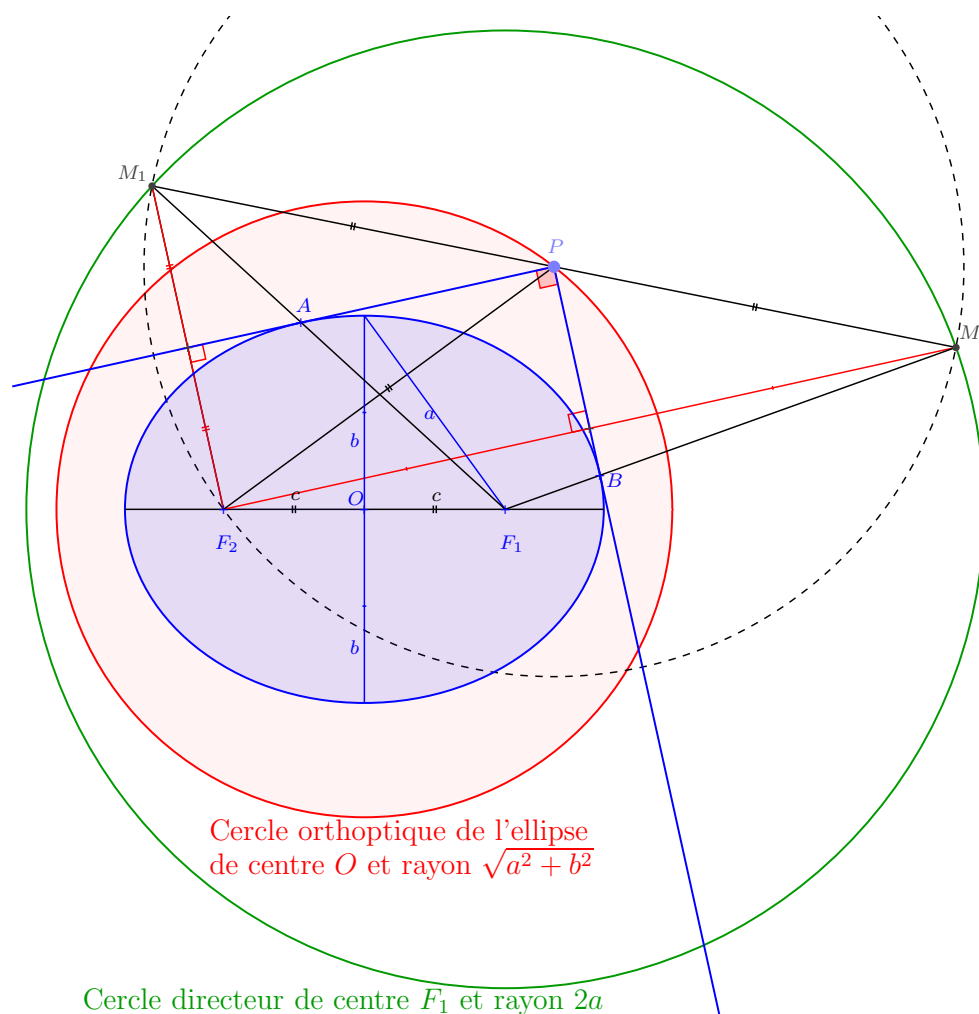


FIGURE II.17 – Cercle orthoptique d'une ellipse

D'où la définition suivante illustrée par la figure II.17,

DÉFINITION 7 *Le cercle orthoptique d'une ellipse de grand axe a et petit axe b , est le cercle de rayon $\sqrt{a^2 + b^2}$ ayant même centre que l'ellipse.*

Les deux tangentes à cette ellipse issues d'un même point de ce cercle sont perpendiculaires.

Chapitre III

Hyperbole

III-1 Hyperbole vue comme section de cône

Comme dans le cas de l'ellipse, étant donné le cône \mathcal{C} , on voudrait étudier les propriétés de l'intersection avec un plan Π , mais cette fois ci nous nous plaçons dans la situation où l'angle β entre le plan et l'axe du cône, est strictement inférieur à l'angle α entre l'axe du cône et l'une quelconque de ses génératrices.

Le cône peut être dissocié en deux nappes engendrées par la rotation de deux demi-droites opposées de même sommet S , dans le cas de l'ellipse avec $\alpha < \beta$ l'intersection avec l'une de ces deux nappes était vide, mais dans la situation avec $\alpha > \beta$, les deux nappes sont interceptées par le plan.

Nous allons procéder comme dans le chapitre précédent, en inscrivant 2 sphères dans le cône, de manière qu'elles soient tangentes au plan Π en des points F_1 et F_2 . Pour obtenir ces sphères, il faut placer leurs centres C_1 et C_2 sur l'axe du cône, pour s'assurer qu'ils soient équidistants de toutes les droites génératrices du cône. On les obtient dans le plan qui contient l'axe du cône et sa projection orthogonale d sur le plan Π , en traçant les bissectrices intérieures et extérieures de d et d'une des deux génératrices du cône situées dans ce plan. Les traces de construction n'apparaissent pas sur la figure III.1 déjà assez complexe, on doit seulement retenir que les points C_1 et C_2 obtenus par intersection de ces bissectrices avec l'axe du cône, sont équidistants de toutes les génératrices du cône et de Π . ; Cela permet de construire les sphères de centre C_1 et C_2 tangentes à Π et à toute génératrice du cône, de plus, à l'exception de deux génératrices qui sont parallèles au plan Π , toutes traversent Π en un point tel que M sur la figure III.1. Ce point M est l'extrémité commune de 4 segments MF_1 , MF_2 , MM_1 et MM_2 tangents à l'une des deux sphères en leurs autres extrémités, d'après le lemme 1 des segments tangents à une sphère, on a : $MF_1 = MM_1$ et $MF_2 = MM_2$. Mais cette fois-ci M est à l'extérieur du segment $[M_1M_2]$, et selon la nappe dans laquelle se situe le point M on en déduit $MF_1 - MF_2 = M_1M_2$ ou bien $MF_2 - MF_1 = M_1M_2$. Cela prouve que tout point $M \in \Pi \cap \mathcal{C}$ vérifie les égalités :

$$|MF_2 - MF_1| = |MM_2 - MM_1| = M_1M_2 = C_1C_2 \cos \alpha$$

M décrit donc une courbe plane telle que la valeur absolue de la différence $MF_1 - MF_2$ soit constante. Cette nouvelle conique est appelée hyperbole, on précise si besoin est, hyperbole à deux branches, pour tenir compte du fait qu'il existe une branche pour laquelle $MF_1 - MF_2$ est positive, et l'autre pour laquelle cette différence est négative.

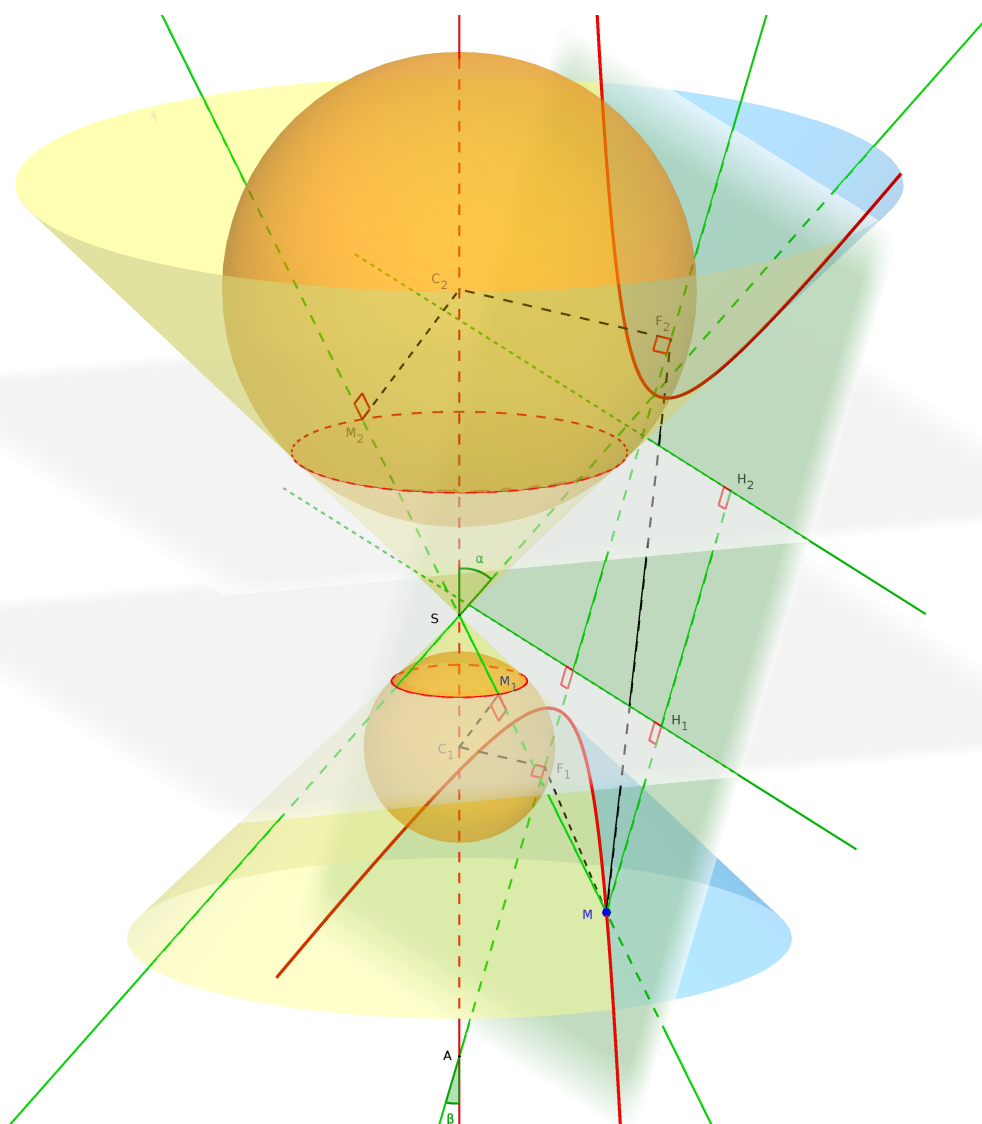


FIGURE III.1 – hyperbole obtenue par section plane d'un cône ($\alpha > \beta$).

III-2 Définition bifocale de l'hyperbole

2-1 Caractérisation d'une hyperbole par ses foyers et la distance entre ses deux branches

Nous venons d'observer des courbes dont chaque point est tel que, la valeur absolue de la différence des distances entre lui et deux autres points fixes soit constante. Cela nous amène à poser cette première définition d'une hyperbole semblable à celle d'une ellipse, dite définition bifocale.

DÉFINITION 8 *Dans un plan euclidien Π , étant donné deux points F_1 et F_2 et un réel $d < F_1F_2$, l'hyperbole de foyers F_1 et F_2 et distance entre ses branches égale à d , est l'ensemble des points tels que $|MF_1 - MF_2| = d$*

Désignons par \mathcal{H} une telle hyperbole, La constante d doit nécessairement être inférieure ou

égale à la distance F_1F_2 pour obtenir un ensemble non vide, nous avons précisé l'inégalité stricte pour ne pas obtenir un ensemble réduit à deux demi-droites si $d = F_1F_2$. Pour tout point M , on a en effet d'après l'inégalité triangulaire $|MF_1 - MF_2| \leq F_1F_2$, et si $F_1F_2 = d$, pour qu'un point M puisse vérifier $MF_1 - MF_2 = \pm d$ il faut qu'il soit sur la droite (F_1F_2) en dehors du segment $[F_1F_2]$. À priori, on supposera donc toujours que $d < F_1F_2$, car il est inenvisageable de supposer qu'un ensemble de points réduit à deux demi-droites puisse être une conique, car on ne peut pas le réaliser par intersection d'un cône avec un plan.

Nous justifierons en fin de paragraphe III-3, pourquoi d a été appelé distance entre les deux branches, ainsi que l'unicité de ce nombre et des deux foyers qui servent à caractériser une hyperbole. La justification de cette dernière affirmation est moins immédiate que pour l'ellipse, avant d'avoir évoqué les équations cartésiennes d'une ellipse.

2-2 Construction d'un cône dont l'hyperbole est une section plane

Pour montrer que la définition bifocale d'une hyperbole est équivalente la définition par section conique entrevue à la fin du chapitre d'introduction, nous procéderons comme pour l'ellipse. Supposons que l'hyperbole \mathcal{H} représentée en rouge sur la figure III.2, est définie à partir de ses foyers F_1 et F_2 situés dans Π et que $\mathcal{H} = \{M \in \Pi / |MF_1 - MF_2| = 2a\}$, nous allons construire un cône qui permet de l'obtenir comme intersection de ce cône avec Π . On désignera par A_1 et A_2 les deux seuls points particuliers de cette hyperbole situés sur l'axe focal (F_1F_2) , à

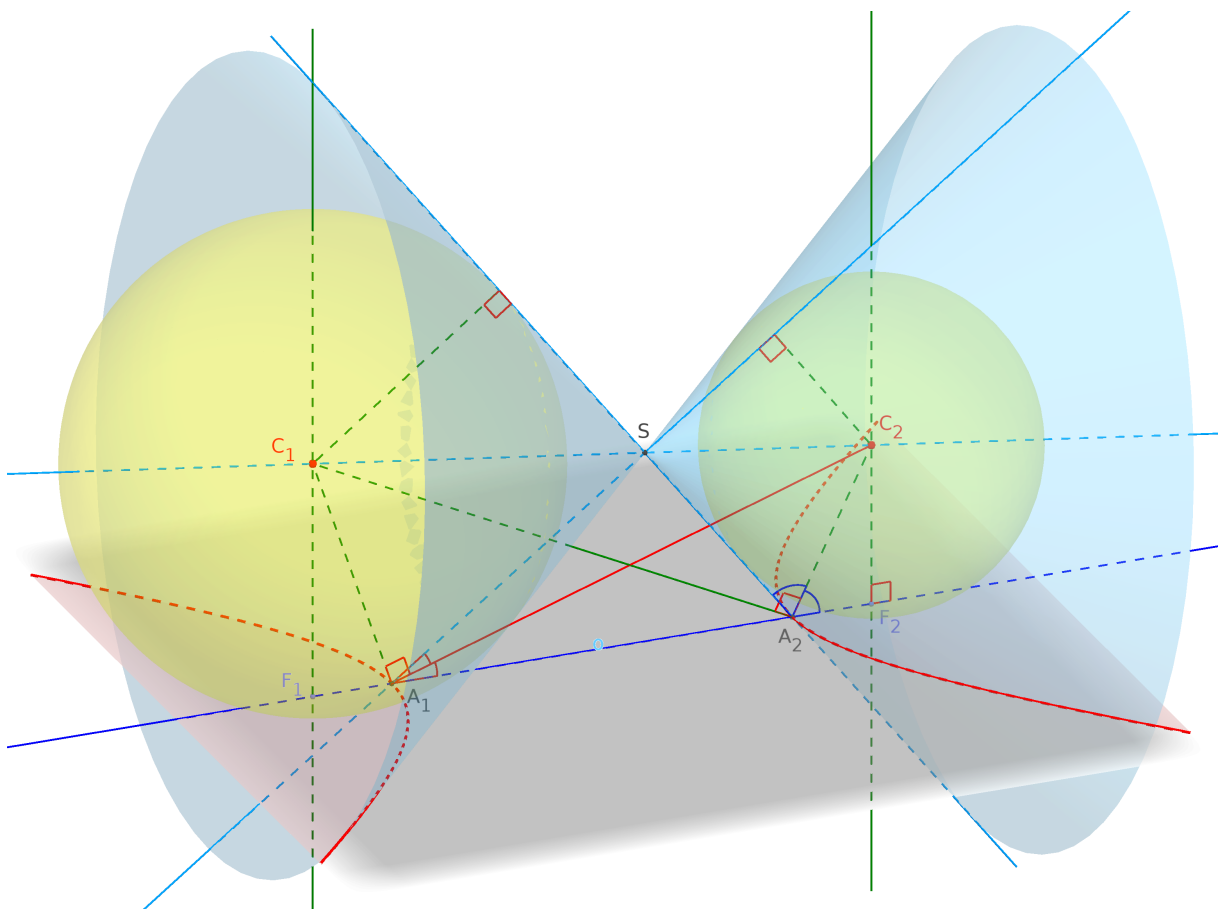


FIGURE III.2 – Construction d'un cône dont la trace dans le plan Π est l'hyperbole.

pouvoir vérifier les égalités : $|S_1F_1 - S_1F_2| = |S_2F_1 - S_2F_2| = 2a$. Puisqu'il y a unicité de la paire de foyers, en cherchant à rétablir la situation de la figure III.1, il faut pouvoir inscrire dans le cône des sphères tangentes à Π en F_1 et F_2 . On peut commencer par la construction d'une première sphère \mathcal{S}_1 tangente à Π en F_1 , il suffit pour cela de placer son centre en un point C_1 sur la perpendiculaire à Π en F_1 . Le cône recherché admet nécessairement pour génératrices tangentes à cette sphère, les deux droites g_1 et g_2 symétriques de l'axe focal (F_1F_2) par rapport à (A_1C_1) et (A_2C_1) . Ces deux droites sont obligatoirement sécantes, elles seraient parallèles si et seulement si (A_1C_1) et (A_2C_2) étaient perpendiculaires, ce qui est impossible, étant donné que C_1 est nécessairement à l'extérieur de la sphère de diamètre $[A_1A_2]$; l'intersection de g_1 et g_2 fournit donc le sommet S du cône recherché.

Le centre de la deuxième sphère \mathcal{S}_2 tangente à g_1 , g_2 et au plan Π , est nécessairement l'un des quatre centres des cercles inscrits ou exinscrits dans le triangle SA_1A_2 , il n'y en a qu'un seul qui puisse être sur d_2 . D'après le paragraphe III-1, nous savons que la section de ce cône par Π est un ensemble \mathcal{C} de points tel que : $M \in \mathcal{C} \Rightarrow |MF_1 - MF_2| = c$, où c est une constante nécessairement égale à $|A_1F_1 - A_1F_2| = |A_2F_1 - A_2F_2| = 2a$, car A_1 et A_2 sont des points particuliers de \mathcal{H} dans le plan Π qui appartiennent évidemment au cône. On a donc $\mathcal{C} \subset \mathcal{H}$, nous montrerons qu'il y a en fait égalité et non cette simple inclusion, en V-4-1 lors de la démonstration du théorème de Dandelin qui concerne tous les types de coniques. On étudiera de plus à cette occasion, le lieu des sommets S d'un cône, qui permet d'obtenir l'hyperbole par intersection du plan qui la contient avec ce cône.

2-3 Construction par cercle directeur de centre F_1 et rayon $d \in]0 ; F_1F_2[$

Les figures III.3 et III.4 illustrent comment chaque point de l'hyperbole peut être vu comme centre d'un cercle tangent au cercle de centre F_1 et rayon d qui doit passer par F_2 ; ce cercle de centre F_1 et rayon d est l'un des deux **cercles directeurs** pour l'hyperbole \mathcal{H} . Tout cercle tangent au cercle directeur de centre F_1 doit avoir son centre sur la droite (XF_1) , où X parcourt le cercle directeur. Pour que ce cercle passe par F_2 et X , son centre doit donc être sur la médiatrice de $[XF_2]$; on obtient donc un point de l'ellipse de foyers F_1 et F_2 à l'intersection de la médiatrice de $[XF_2]$ et de la droite (XF_1) . Selon que X appartenant au cercle directeur est sur l'arc en rouge ou vert sur les figures III.3 et III.4, on peut construire des cercles tangents intérieurement ou extérieurement, le rayon du cercle directeur est bien la constante obtenue en effectuant la différence $MF_1 - MF_2$ ou bien $MF_2 - MF_1$, car $MF_2 = MX$ et $|MF_1 - MX| = F_1X = d$. On obtient donc notre hyperbole \mathcal{H} à deux branches, comme lieu du point M , lorsque X parcourt le cercle directeur. Le rôle des foyers est interchangeable, une hyperbole admet donc un deuxième cercle directeur de même rayon d , centré sur le foyer F_2 .

Contrairement à ce qui se passait pour construire l'ellipse, lorsque X parcourt le cercle directeur, toutes les médiatrices de $[XF_2]$ ne coupent pas $[XF_1]$, car il est possible d'obtenir $(XF_1) \perp (XF_2)$ lorsque $X = E$ ou $X = F$ sur les figures III.3 et III.4, la droite (XF_1) et la médiatrice de (XF_2) sont alors parallèles. Pour que les points E et F existent, il faut que le cercle de diamètre $[F_1F_2]$ intercepte le cercle directeur, ce qui était impossible dans la construction de l'ellipse avec $[F_1F_2]$ à l'intérieur du cercle directeur, est devenu possible avec $d < F_1F_2$.

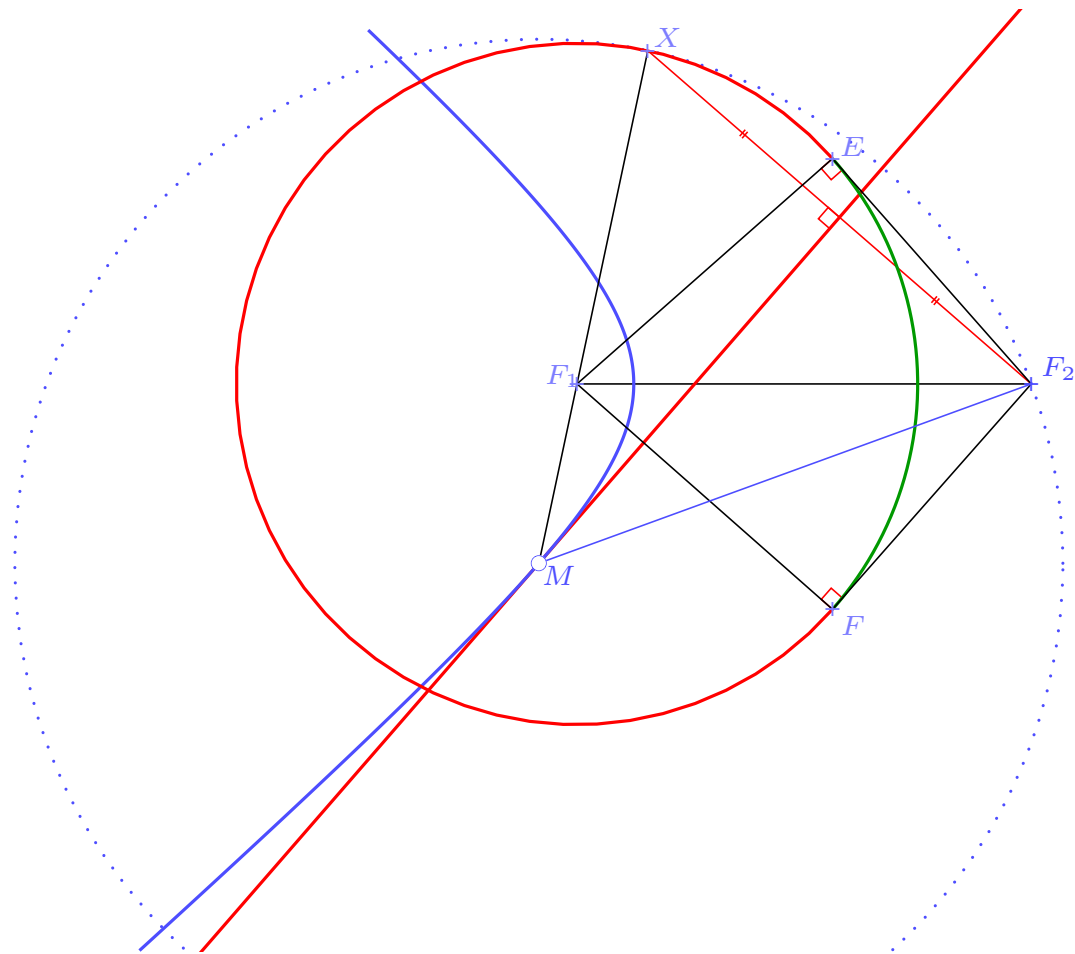


FIGURE III.3 – 1^e branche d'une hyperbole \mathcal{H} , ensemble des points M tels que $MF_2 - MF_1 = d$.

2-4 Droites tangentes à l'hyperbole

Étant donné l'hyperbole \mathcal{H} de foyers F_1 et F_2 constituée de tous les points M tels que $MF_2 - MF_1 = \pm d$ et un point X du cercle directeur de centre F_1 , tout point M' de la médiatrice de $[XF_2]$ vérifie $M'X = M'F_2$, par conséquent, d'après l'inégalité triangulaire $|M'F_2 - M'F_1| = |M'X - M'F_1| \leqslant XF_1 = d$. Dans cette inégalité au sens large, l'égalité a lieu si et seulement si M' est aligné avec F_1 et F_2 , en étant à l'extérieur du segment $[F_1F_2]$. L'hyperbole possède donc un unique point M sur cette médiatrice, tous les autres points de la médiatrice sont dans le domaine constitué de tous les points M' qui vérifient $|M'X - M'F_1| < d$, celui non colorié en bleu sur la figure III.5. Comme dans le cas de l'ellipse, il apparaît donc que cette médiatrice est tangente à l'hyperbole.

En supposant que cette courbe est différentiable, ce que nous montrerons dans le paragraphe suivant, nous allons montrer plus rigoureusement que la médiatrice en question qui est aussi bissectrice intérieure de $\widehat{F_1MF_2}$, est effectivement tangente à l'hyperbole. Comme pour l'ellipse (voir paragraphe 2-4), considérons une représentation paramétrique d'une branche de l'hyperbole de \mathcal{H} que l'on suppose dérivable $u : I \rightarrow \Pi$, I est un intervalle de \mathbb{R} et Π l'espace

$$t \mapsto u(t)$$

affine de dimension 2 qui contient \mathcal{H} . Si F est la fonction telle que $F : \Pi \rightarrow \mathbb{R}$,
 $M \mapsto F_2M - F_1M$

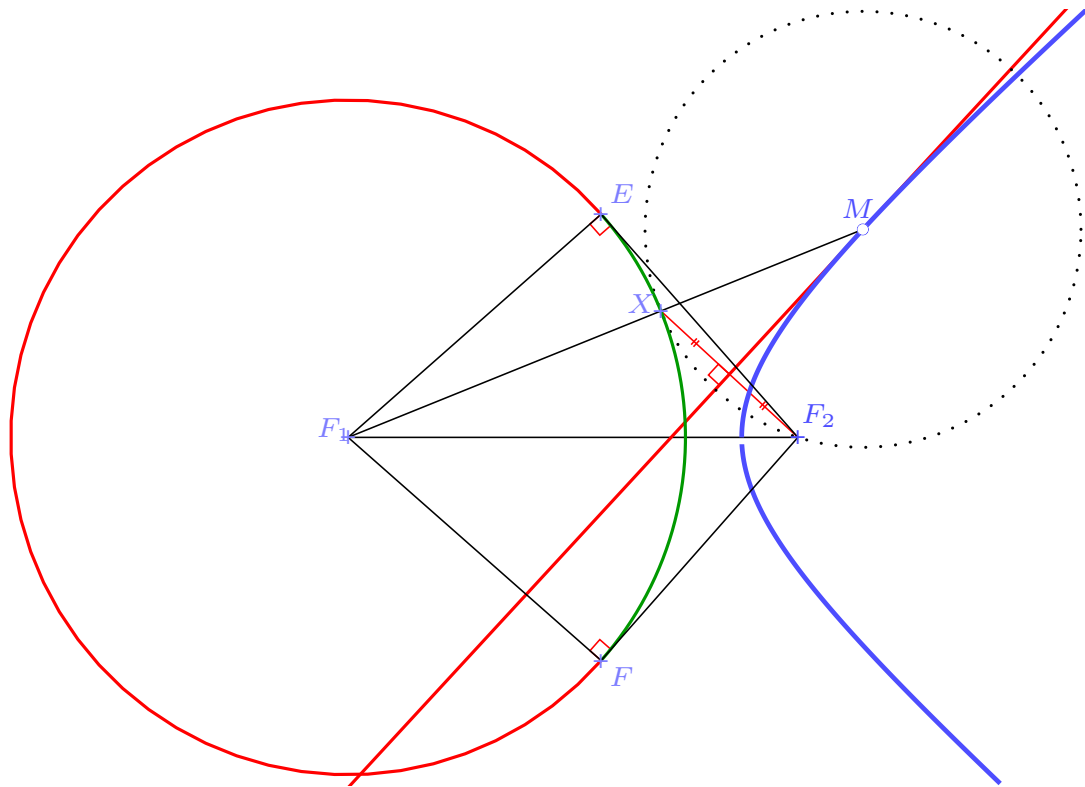


FIGURE III.4 – 2^e branche d’une hyperbole \mathcal{H} , ensemble des points M tels que $MF_2 - MF_1 = -d$.

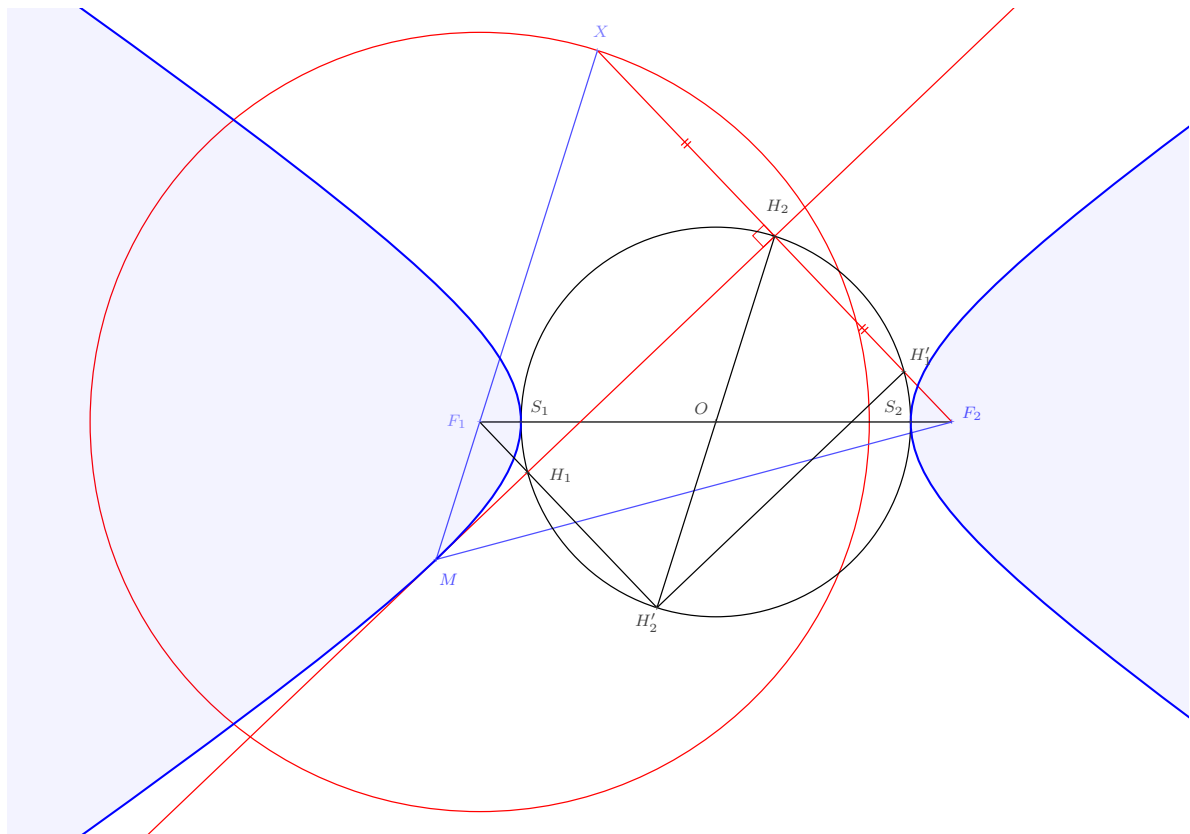


FIGURE III.5 – Construction des tangentes à une hyperbole

alors $f = F \circ u$ est constante et prend la valeur d ou $-d$ selon la branche dont u est une représentation paramétrique. On a expliqué dans le chapitre sur l'ellipse comment calculer le gradient d'une fonction telle que F , il s'agit d'un champ de vecteurs qui associe à chaque point $M \in \Pi$,

le vecteur $\frac{\overrightarrow{F_2M}}{F_2M} - \frac{\overrightarrow{F_1M}}{F_1M}$.

Lorsque l'on dérive la fonction composée $F \circ u$, le produit matriciel qui aboutit au nombre dérivé en t tel que $u(t) = M$, peut être interprété comme le produit scalaire $\overrightarrow{u'(t)} \left(\frac{\overrightarrow{F_2M}}{F_2M} - \frac{\overrightarrow{F_1M}}{F_1M} \right)$, celui-ci est nul pour tout t , étant donné que $F \circ u$ est constante. La droite d tangente à \mathcal{H} en $M = u(t)$ qui est dirigée par $\overrightarrow{u'(t)}$ est donc perpendiculaire à la bissectrice extérieure de $\widehat{F_1MF_2}$ dirigée par $\frac{\overrightarrow{F_2M}}{F_2M} - \frac{\overrightarrow{F_1M}}{F_1M}$, la droite d est donc bien bissectrice intérieure de $\widehat{F_1MF_2}$.

Comme pour l'ellipse, si on considère l'homothétie h de centre F_2 et rapport $\frac{1}{2}$, elle transforme le cercle directeur de centre F_1 en un cercle de centre O milieu de $[F_1F_2]$, et de rayon $a = \frac{d}{2}$, nous l'appellerons cercle principal de l'hyperbole; il admet $[S_1S_2]$ pour diamètre, S_1 et S_2 étant les sommets de l'hyperbole dont nous préciserons la position en fin de paragraphe III-3. L'homothétie h transforme donc tout point X du cercle directeur en un point situé sur le cercle principal, qui est pied de la médiatrice de $[XF_2]$. Cela permet d'affirmer comme pour l'ellipse que le projeté orthogonal d'un foyer de l'hyperbole sur l'une de ses tangentes appartient au cercle principal. cette propriété illustrée par la figure III.6 nous sera très utile, lorsque nous rechercherons une hyperbole tangente aux trois côtés d'un triangle.

Le rôle des foyers étant interchangeable, il y a deux cercles directeurs, mais il y a toujours un seul principal. Comme pour l'ellipse, lorsqu'on projette les deux foyers sur une tangente à la conique bifocale, on obtient donc des points sur le cercle principal. Les symétriques par rapport au centre du cercle sont bien évidemment aussi sur le cercle, ce qui nous permet d'écrire les égalités $F_1H_1 = F_2H'_1$ et $F_2H_2 = F_1H'_1$. On en déduit que les puissances des points F_1 ou F_2 à l'extérieur du cercle principal, ont une puissance par rapport à ce cercle positive égale à $F_1H_1 \times F_2H_2 = c^2 - a^2$, où l'on a posé $a = \frac{d}{2} = \frac{S_1S_2}{1}$ et $c = \frac{F_1F_2}{2}$; quelque soit la tangente on obtient donc un produit constant, cette remarque nous sera très utile au paragraphe V-5-3, pour établir certaines propriétés de la conjugaison isogonale par rapport à un triangle.

III-3 Équation cartésienne d'une hyperbole

3-1 Choix du repère

Étant donné une hyperbole \mathcal{H} de foyers F_1, F_2 et distance d entre ses deux sommets, choisissons le repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ comme sur la figure III.6, tel que O soit milieu des foyers et $\vec{i} = \frac{1}{OF_1} \overrightarrow{OF_1}$.

Posons $a = \frac{d}{2}$ et $c = OF_1 = OF_2$, puis étant donné un point M de coordonnées $(x; y)$, posons $r_1 = MF_1$ et $r_2 = MF_2$ on a :

$$\begin{cases} r_1^2 = (x - c)^2 + y^2 \\ r_2^2 = (x + c)^2 + y^2 \end{cases} \implies (r_2 - r_1)(r_2 + r_1) = r_2^2 - r_1^2 = 4cx$$

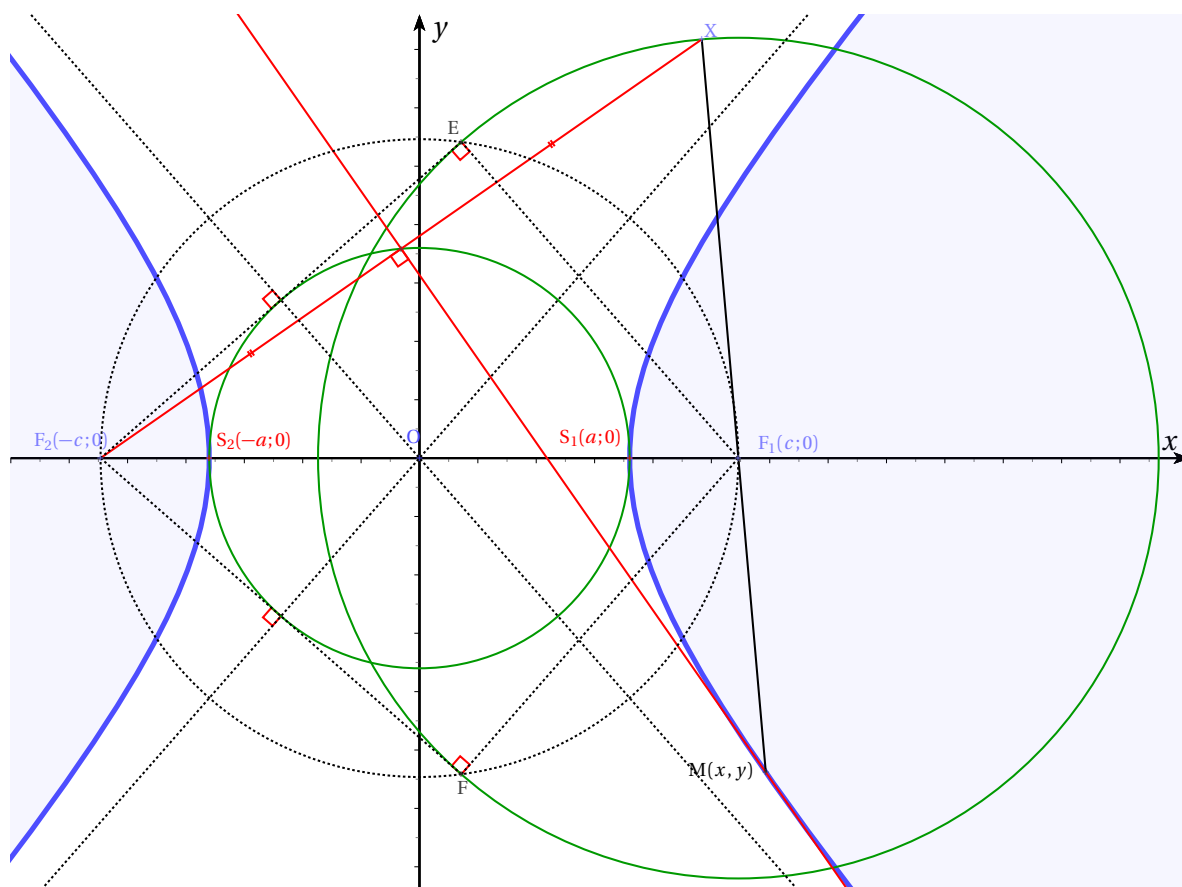


FIGURE III.6 – Points, cercles et droites remarquables d'une hyperbole.

Soit ε un nombre auquel nous attribuerons la valeur 1 ou -1,

$$M \in \mathcal{H} \Rightarrow \begin{cases} r_2 - r_1 = \frac{2a\varepsilon}{a} \\ r_2 + r_1 = \frac{2cx\varepsilon}{a} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r_2\varepsilon = \frac{cx}{a} + a \\ r_1\varepsilon = \frac{cx}{a} - a \end{cases}$$

Pour $M(x; y) \in \mathcal{H}$, on en déduit les égalités équivalentes suivantes :

$$\left(\frac{cx}{a} + a\right)^2 = (x+c)^2 + y^2 \quad \text{ou} \quad \left(\frac{cx}{a} - a\right)^2 = (x-c)^2 + y^2$$

Pour que \mathcal{H} ne soit pas vide, rappelons qu'il nous faut nécessairement avoir $c > a$, cela justifie que l'on puisse poser $b = \sqrt{c^2 - a^2}$, pour obtenir finalement les équations suivantes équivalentes aux deux précédentes :

$$\left(\frac{c^2}{a^2} - 1\right)x^2 - y^2 = c^2 - a^2 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Réciproquement si un point $M(x; y)$ vérifie l'équation $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ où a et b sont deux réels quelconques, vérifions qu'il est sur une hyperbole dont nous allons retrouver les foyers $F_1(c; 0)$ et $F_2(-c; 0)$, en posant $c = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Des égalités $y^2 = \frac{b^2}{a^2}x^2 - b^2$ et $a^2 + b^2 = c^2$, on peut déduire :

$$\begin{cases} F_1M^2 = (x-c)^2 + y^2 = (x^2 - 2xc + c^2) + \left(\frac{b^2}{a^2}x^2 - b^2\right) \\ F_2M^2 = (x+c)^2 + y^2 = (x^2 + 2xc + c^2) + \left(\frac{b^2}{a^2}x^2 - b^2\right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} F_1M^2 = \frac{c^2}{a^2}x^2 - 2cx + a^2 = \left(\frac{xc}{a} - a\right)^2 \\ F_2M^2 = \frac{c^2}{a^2}x^2 + 2cx + a^2 = \left(\frac{xc}{a} + a\right)^2 \end{cases}$$

L'équation $\frac{x^2}{a^2} = \frac{y^2}{b^2} + 1$ implique que l'on ait $\left|\frac{x}{a}\right| \geq 1$, on en déduit $\left|\frac{xc}{a}\right| \geq c > a$, et par conséquent :

- si x est positif on a nécessairement $x \geq a$ et
$$\begin{cases} F_1M = \frac{xc}{a} - a \\ F_2M = \frac{xc}{a} + a \end{cases},$$

on a donc $F_2M - F_1M = 2a$, M est donc un point de la branche d'hyperbole n'ayant que des points d'abscisse supérieure ou égale à celle de son sommet $S_1(a; 0)$, telle que $F_2M - F_1M = 2a$.

- Si x est négatif on a nécessairement $x \leq -a$ et
$$\begin{cases} F_1M = -\frac{xc}{a} + a \\ F_2M = -\frac{xc}{a} - a \end{cases},$$

on a donc $F_2M - F_1M = -2a$, M est donc un point de la branche d'hyperbole n'ayant que des points d'abscisse inférieure ou égale à celle de son sommet $S_2(-a; 0)$, telle que $F_2M - F_1M = -2a$,

Cela nous permet de proposer cette deuxième définition d'une hyperbole :

DÉFINITION 9 *Dans un plan euclidien Π , une hyperbole est une courbe plane pour laquelle il existe un couple $(a; b)$ de nombres réels strictement positifs, et un repère orthonormé du plan dans lequel elle se situe, pour lequel elle admet une équation cartésienne du type : $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.*

Nous venons de montrer qu'elle admet deux branches disjointes, situées l'une dans le demi-plan d'inéquation $x \geq a$ et l'autre dans le demi-plan d'inéquation $x \leq -a$, et que si l'on pose $c = \sqrt{a^2 + b^2}$, les points $F_1(c; 0)$ et $F_2(-c; 0)$ sont ses foyers. La distance entre les deux branches est la distance $2a$ entre les deux demi-plans, puisque les points $S_1(a; 0)$ et $S_2(-a; 0)$ sont sur l'hyperbole et sur les frontières parallèles de ces deux demi-plans. Cette paire de points que nous avons appelées sommets est donc unique, puisque qu'on peut la caractériser par le fait que c'est la seule à réaliser le minimum de $d(MM')$ avec M et M' sur des branches différentes.

Comme pour l'ellipse, on en déduit qu'il existe une seule paire de foyers possibles pour une hyperbole. Ils sont nécessairement sur la droite (S_1S_2) caractéristique de l'hyperbole, et doivent avoir même milieu que $[S_1S_2]$. Étant donné une hyperbole \mathcal{H} obéissant à la définition 9, toute autre paire $\{F'_1, F'_2\}$ de foyers, différente de $\{F_1, F_2\}$ telle que $[S_1S_2] \subset [F'_1F'_2]$ et $OF'_1 = OF'_2 = c' \neq c$, permettrait de définir une hyperbole \mathcal{H}' admettant les mêmes sommets que \mathcal{H} .

En posant $b' = \sqrt{a^2 - c'^2}$, on peut attribuer à \mathcal{H}' l'équation $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b'^2} = 1$, dans le même repère

que celui utilisé plus haut pour \mathcal{H} . Il devient alors facile de remarquer que lorsque $c \neq c'$, \mathcal{H} et \mathcal{H}' n'ont en commun, que leurs sommets S_1 et S_2 . Cette simple remarque concernant l'unicité des foyers, que nous avons déjà évoqué en 2-2 sera essentielle pour déterminer l'ensemble de tous les sommets possible d'un cône qui passe par tous les points d'une hyperbole.

3-2 Représentation paramétrique

L'équation cartésienne de la dernière définition permet de proposer une représentation paramétrique, en utilisant la fonction exponentielle $\exp : \mathbb{R} \rightarrow]0; +\infty[$ et les relations

$$x \mapsto e^x$$

$$\text{algébriques : } \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2 = 1 \quad \text{et} \quad \frac{1}{a^2} \left(\frac{a(e^x + e^{-x})}{2}\right)^2 - \frac{1}{b^2} \left(\frac{b(e^x - e^{-x})}{2}\right)^2 = 1.$$

Il est aisé de comprendre pourquoi on a appelé cosinus hyperbolique et sinus hyperbolique, les fonctions suivantes :

$$\begin{aligned} \text{ch} : \mathbb{R} &\longrightarrow]1; +\infty[& ; & \text{sh} : \mathbb{R} \longrightarrow]-\infty; +\infty[\\ x &\longmapsto \frac{e^x + e^{-x}}{2} & & x \longmapsto \frac{e^x - e^{-x}}{2} \end{aligned}$$

On leur fait jouer un rôle semblable aux fonctions trigonométriques circulaires, avec l'inconvénient que la fonction sh est une bijection de \mathbb{R} dans \mathbb{R} et que la fonction ch est une surjection de \mathbb{R} dans $]1; +\infty[$, telle que tout réel $x > 1$ admet deux antécédents $\ln(x \pm \sqrt{x^2 - 1})$. C'est un inconvénient car ces deux fonctions ne peuvent suffire à décrire en une seule représentation paramétrique, l'ensemble des points des deux branches d'une hyperbole. Pour l'ellipse, Il suffisait d'utiliser l'intervalle $]-\pi; \pi]$ pour exprimer de 2 façons possibles par $b \sin t$ ou bien $\sin(\pi - t)$,

toute ordonnée $y \in [-b; b]$ que peut prendre un point de la courbe d'équation $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, on pouvait obtenir ainsi les abscisses opposées $a \cos t$ et $a \cos(\pi - t)$. Les fonctions hyperboliques ch et sh nous contraignent à devoir utiliser l'ensemble de tous les nombres réels pour pouvoir exprimer par $b \cdot \text{sh} t$, toute ordonnée y que peut prendre un point de l'hyperbole d'équation $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, et ceci d'une façon unique car la fonction sh est une bijection. En effet, pour tout $y \in \mathbb{R}$, il existe alors deux points d'ordonnées $y = b \cdot \text{sh} t$ sur l'hyperbole, dont les abscisses sont

$\pm a \sqrt{1 + \frac{y^2}{b^2}} = \pm a \cdot \text{ch} t$, une branche de l'hyperbole peut donc être décrite par la représentation

$$\text{paramétrique } \begin{cases} x(t) = a \cdot \text{ch} t \\ y(t) = b \cdot \text{sh} t \\ t \in \mathbb{R} \end{cases} \text{ et l'autre branche par } \begin{cases} x(t) = -a \cdot \text{ch} t \\ y(t) = b \cdot \text{sh} t \\ t \in \mathbb{R} \end{cases}$$

3-3 Équations cartésiennes des tangentes, normales et asymptotes

Droites tangentes à l'hyperbole

Étant donné le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$, considérons la fonction

$$\begin{aligned} \varphi : \quad \Pi &\longrightarrow \mathbb{R} \\ M(x; y) &\longmapsto \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \end{aligned}$$

Les courbes de niveau de cette fonction sont des hyperboles, dont \mathcal{H} en particulier est la courbe de niveau 1. Le gradient de φ est la fonction $\vec{u} : \Pi \rightarrow \vec{\Pi}$. Si le point $M_0(x_0; y_0)$ est sur l'hyperbole \mathcal{H} , le vecteur $\frac{1}{2}\overrightarrow{u(M_0)} = \frac{x_0}{a^2}\vec{i} - \frac{y_0}{b^2}\vec{j}$ est normal à \mathcal{H} en M_0 , on peut en déduire cette équation de la tangente à \mathcal{H} en M_0 : $\frac{x_0}{a^2}x - \frac{y_0}{b^2}y = 1$. En prenant $\frac{a^2}{x_0}\vec{i} + \frac{b^2}{y_0}\vec{j}$ pour vecteur normal à $\overrightarrow{u(M_0)}$, on obtient pour équation de la droite normale à l'hyperbole en M_0 : $\frac{a^2}{x_0}x + \frac{b^2}{y_0}y = c^2$.

Droites asymptotes à l'hyperbole

Lorsque nous avons construit les deux branches d'une hyperbole à l'aide de l'un de ses cercles directeurs tel que nous l'avons illustré à l'aide des figures III.3, III.4 ou III.6, lorsque X parcourait le cercle directeur, les médiatrices de $[XF_2]$ fournissaient tous les points et toutes les droites tangentes à l'hyperbole. Mais parmi toutes ces médiatrices, deux d'entre elles lorsque $X = E$ ou $X = F$, ne permettent pas de construire un point de l'hyperbole par intersection avec $[XF_1]$. Nous pourrions dire que ces droites sont tangentes à l'hyperbole en un point rejeté à l'infini, ce sont elles qu'on appelle asymptotes de l'hyperbole et que nous avons tracé en pointillé noir sur la figure III.6. On peut remarquer que les projetés orthogonaux des foyers sur les asymptotes sont aussi sur le cercle principal de l'hyperbole. On peut retrouver leurs équations en se servant du fait que les triangles FF_1F_2 et EF_1F_2 doivent être rectangles en E et F , pour que les médiatrices de $[EF_2]$ et $[FF_2]$ soient parallèles respectivement à (EF_1) et (FF_1) .

Nous utilisons le même repère que dans les deux paragraphes précédents et les réels $a = \frac{d}{2}$ et $c = \frac{F_1F_2}{2}$, ces asymptotes passent par O milieu de $[F_1F_2]$ et leurs coefficients directeurs sont les tangentes des angles orientés $(\overrightarrow{F_1F_2}; \overrightarrow{F_1E})$ et $(\overrightarrow{F_1F_2}; \overrightarrow{F_1F})$, c'est à dire $\pm \frac{EF_2}{EF_1} =$

$\pm \frac{2\sqrt{c^2 - a^2}}{2a} = \pm \frac{b}{a}$. Les asymptotes ont donc pour équations $y = \pm \frac{b}{a}x$,

- la droite d_1 médiatrice de $[EF_2]$ admet pour équation $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 0$,
- la droite d_2 médiatrice de $[FF_2]$ admet pour équation $\frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 0$

Contrairement à l'ellipse pour laquelle l'ensemble de ses points est nécessairement borné, une hyperbole possède des branches infinies, car quelque soit le réel $x \in]-\infty; a] \cup [a; +\infty[$, il existe toujours deux réels y tels que $y^2 = b^2 \left(\frac{x^2}{a^2} - 1 \right)$. Le nom ou qualificatif d'asymptote que nous avons donné aux droites d_1 et d_2 définies plus haut, vient du fait que lorsque l'on fait tendre x vers $\pm\infty$, les branches de l'hyperbole s'en rapprochent aussi près que l'on veut. En effet, pour une même abscisse x , les ordonnées des points de ces droites et les ordonnées $y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - \frac{1}{a^2}}$ des points de l'hyperbole, ont des différences qui vérifient :

- quand x tend vers $+\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \pm \frac{b}{a} \left(\sqrt{x^2 - \frac{1}{a^2}} - x \right) = 0$, cela montre que
 - d_1 est asymptote quand y tend vers $+\infty$
 - d_2 est asymptote quand y tend vers $-\infty$.

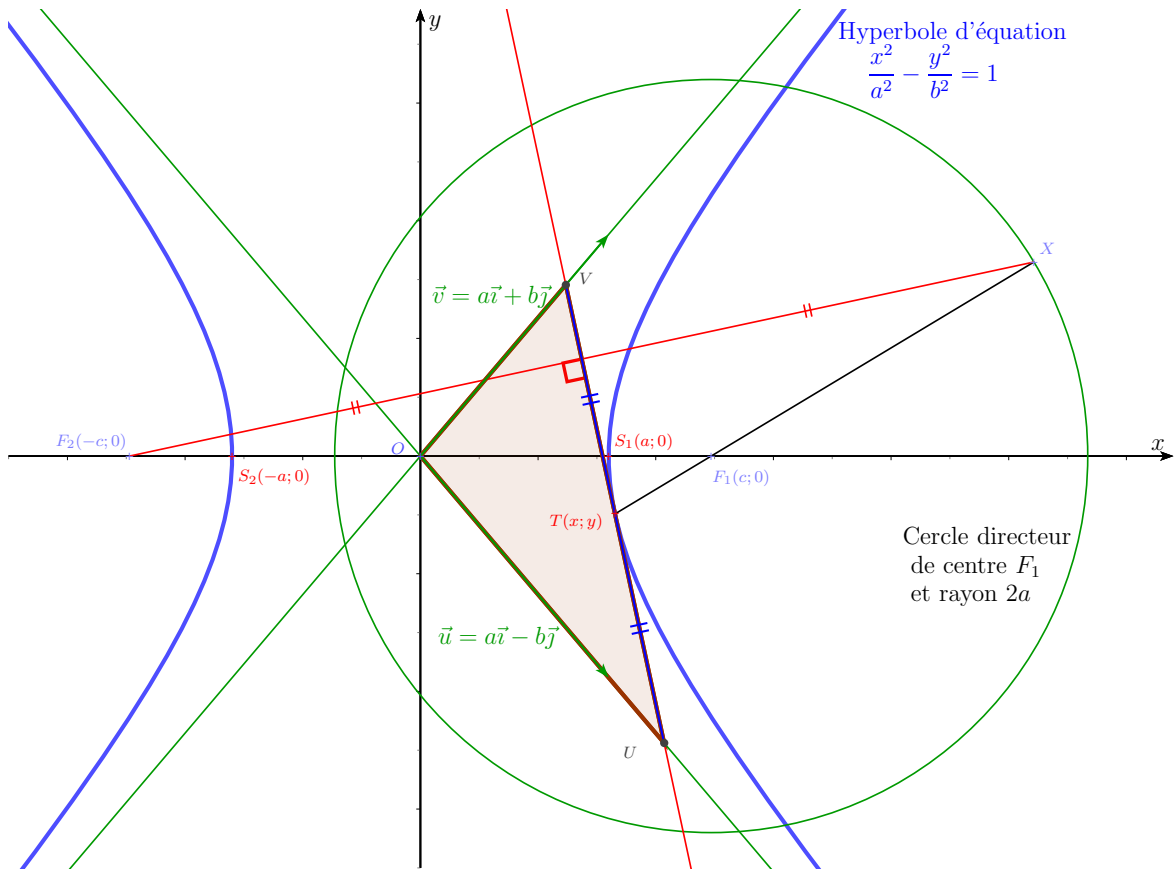


FIGURE III.7 – Triangle aux côtés supportés par les asymptotes et une tangente à l’hyperbole.

- quand x tend vers $-\infty$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} \pm \frac{b}{a} \left(\sqrt{x^2 - \frac{1}{a^2}} + x \right) = 0$, cela montre que
 - d_2 est asymptote quand y tend vers $+\infty$
 - d_1 est asymptote quand y tend vers $-\infty$.

Lorsque $a = b$, les asymptotes ont pour équation $y = x$ et $y = -x$, elles sont perpendiculaires, on dit que l’hyperbole est équilatère.

Le fait qu’une hyperbole ait quatre branches infinies est une remarque importante, qui nous permettra par la suite d’énoncer des critères permettant de déterminer la nature d’une conique : ellipse, hyperbole ou parabole.

3-4 Équation cartésienne rapportée aux asymptotes

Étant donné l’hyperbole \mathcal{H} d’équation $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$, soit le nouveau repère (O, \vec{u}, \vec{v}) de même origine, mais dont les vecteurs de bases $\vec{u} = a\vec{i} - b\vec{j}$ et $\vec{v} = a\vec{i} + b\vec{j}$ ont même direction que les asymptotes, ce repère est orthogonal si et seulement si l’hyperbole est équilatère. Soit $(X; Y)$ les coordonnées d’un point M dans le repère (O, \vec{u}, \vec{v}) et $(x; y)$ ses coordonnées dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$, les formules de changement de coordonnées s’exprime par les produits matriciels :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & a \\ -b & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \frac{1}{2ab} \begin{pmatrix} b & -a \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

On en déduit :

$$M \in \mathcal{H} \Leftrightarrow \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \Leftrightarrow (X+Y)^2 - (X-Y)^2 = 1 \Leftrightarrow XY = \frac{1}{4}$$

Étant donnée une droite d tangente à \mathcal{H} en l'un de ses points T tel que $\overrightarrow{OT} = x_0\vec{i} + y_0\vec{j} = X_0\vec{u} + Y_0\vec{v}$, M appartient à d si et seulement si on a :

$$\frac{xx_0}{a^2} - \frac{yy_0}{b^2} = 1 \Leftrightarrow (X_0 + Y_0)(X + Y) - (X - Y)(X_0 - Y_0) = 1 \Leftrightarrow Y_0X + X_0Y = \frac{1}{2}$$

d coupe donc les asymptotes en deux points U et V de coordonnées respectives $\left(\frac{1}{2Y_0}; 0\right)$ et $\left(0; \frac{1}{2X_0}\right)$ dans le repère (O, \vec{u}, \vec{v}) . En tenant compte de $X_0Y_0 = \frac{1}{4}$, on obtient $\overrightarrow{OU} = 2X_0\vec{u}$ et $\overrightarrow{OV} = 2Y_0\vec{v}$ qui montre que T_0 est milieu de $[UV]$. L'unité d'aire étant déterminée par le repère orthonormé de départ, l'aire du triangle OUV peut être calculée à l'aide du déterminant dans la base (\vec{i}, \vec{j}) , elle est égale à $\frac{1}{2} \det(\overrightarrow{OU}, \overrightarrow{OV}) = \frac{4X_0Y_0}{2} \det(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{1}{2} \det(\vec{u}, \vec{v}) = ab$, on peut donc énoncer le théorème suivant :

THÉORÈME 7 *Étant donné une hyperbole \mathcal{H} , toute droite tangente à \mathcal{H} en un point $T \in \mathcal{H}$, coupe les asymptotes de \mathcal{H} en deux points U et V tels que T soit milieu de $[UV]$. Si \mathcal{H} admet pour équation $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$, alors le triangle OUV a pour aire ab .*

Cordes et asymptotes

On appelle corde d'une hyperbole un segment joignant deux points sur l'hyperbole, tel que $[PQ]$, $[P'Q']$ ou $[P''Q'']$ sur les figures III.9 et III.8, si on considère le segment $[MN]$ dont les extrémités sont sur les asymptotes et la droite (PQ) , on peut montrer que ces deux segments ont le même milieu. Si $(m; 0)$ et $(0; n)$ sont les coordonnées de M et N dans le repère (O, \vec{u}, \vec{v}) , l'équation de la droite (MN) dans le repère (O, \vec{u}, \vec{v}) est $nX + mY = mn$, les coordonnées $(X; Y)$ de M ou N doivent vérifier de plus $XY = \frac{1}{4}$ pour être sur l'hyperbole.

En multipliant les membres de l'équation de la droite par X ou Y , on obtient les deux équations du second degré suivantes

$$\begin{cases} nX^2 - mnX + \frac{m}{4} = 0 \\ mY^2 - mnY + \frac{n}{4} = 0 \end{cases}$$

M et N ont donc pour coordonnées donc l'un de ces deux couples :

$$\left(\frac{mn - \sqrt{m^2n^2 - mn}}{2n}; \frac{mn + \sqrt{m^2n^2 - mn}}{2m} \right)$$

$$\left(\frac{mn + \sqrt{m^2n^2 - mn}}{2n}; \frac{mn - \sqrt{m^2n^2 - mn}}{2m} \right)$$

le milieu de $[MN]$ a donc pour coordonnées $\left(\frac{m}{2}; \frac{n}{2}\right)$, il s'agit des mêmes coordonnées que celle du milieu de $[MN]$. L'ensemble des milieux de cordes toutes parallèles entre elles est donc l'ensemble des milieux des cotés de triangles $OM'N'$ homothétiques du triangle OMN , dans une homothétie de centre O , ces milieux sont donc tous alignés avec O . Ce résultat concerne aussi bien les cordes dont les extrémités sont sur la même branche, ou bien des branches différentes de l'hyperbole.

Droites conjuguées d'une hyperbole

Dans le chapitre sur l'ellipse nous avons parlé de cordes ou diamètres conjugués, nous avons des résultats semblables concernant l'hyperbole, qui découlent des deux résultats précédents. Mais une ellipse étant bornée, nous avons des segments de droites comme lieu des milieux de cordes parallèles entre elles, alors que pour une hyperbole qui a des branches infinies, nous allons obtenir des droites, pour des cordes reliant des points sur des branches distinctes, mais seulement deux demi-droites symétriques par rapport au centre de l'hyperbole, quand ces

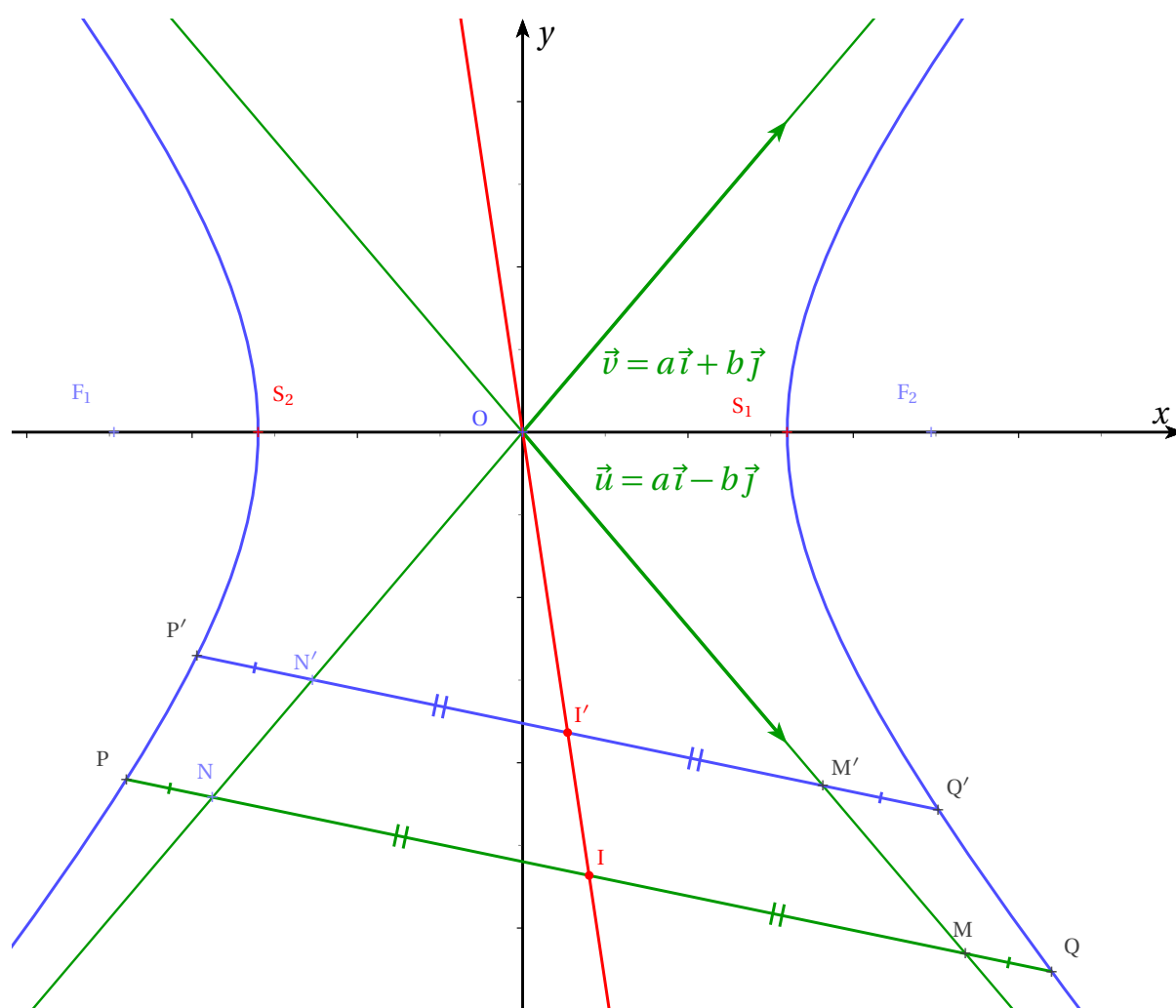


FIGURE III.8 – Lieu du milieu des cordes parallèles entre elles, reliant 2 points sur des branches distinctes d'une hyperbole.

cordes reliant des points sur la même branche. Nous allons procéder de la même manière que pour une ellipse (voir (4-2)), en commençant par construire les tangentes à une hyperbole dirigées par un vecteur \vec{u} fixé à l'avance.

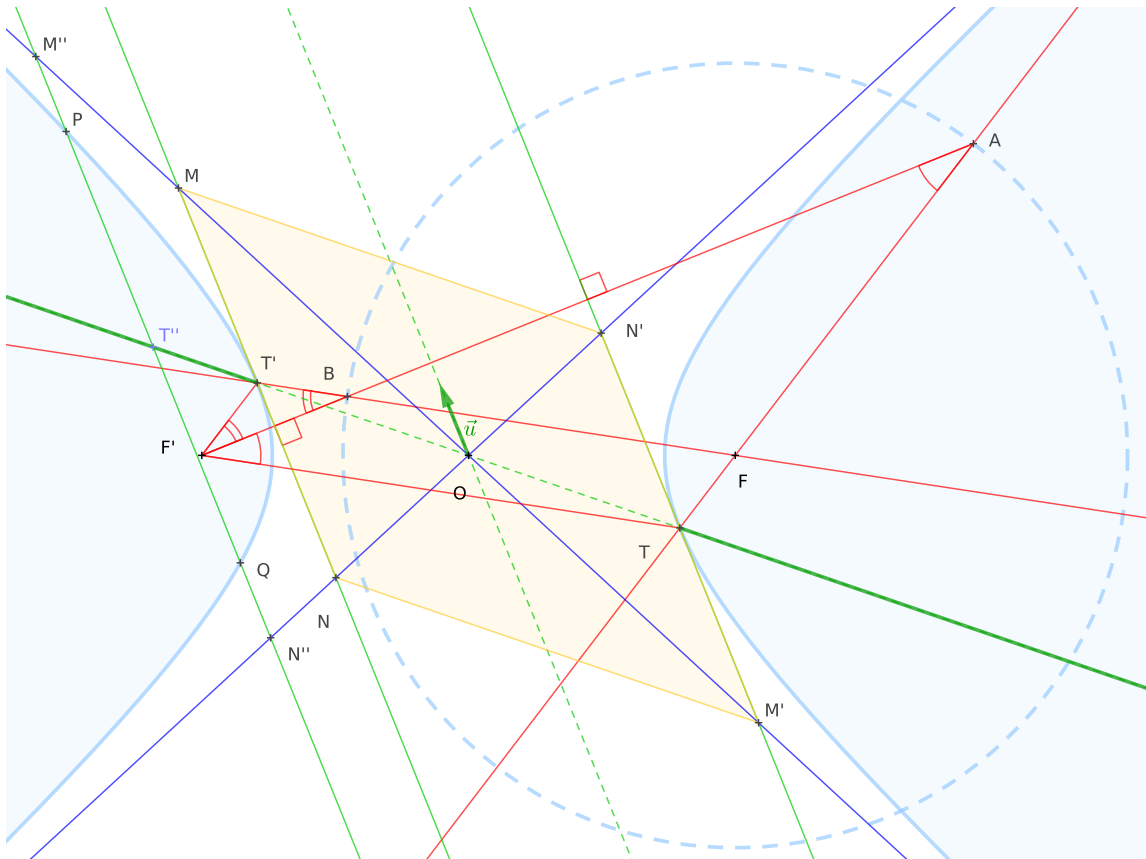


FIGURE III.9 – Lieu du milieu des cordes parallèles entre elles, reliant 2 points sur la même branche.

Mais cette fois ci, pour certaines directions, il n'existe pas toujours de tangentes à l'ellipse, car l'un des foyers F' est extérieur au cercle directeur de centre F , une droite orthogonale à la direction de \vec{u} n'est donc pas nécessairement sécante avec le cercle directeur. Lorsque ces tangentes existent, il y en a nécessairement deux qui sont symétriques par rapport au centre O de symétrie de l'hyperbole ; les points de contacts T et T' sont eux-mêmes symétriques par rapport à O . D'après le théorème 7, ces tangentes coupent les asymptotes en des points qui sont sommets d'un parallélogramme $MNM'N'$ de centre O , dont $[TT']$ est une médiane (voir figure ref III.9). Avec les notations du paragraphe précédent, on peut remarquer que le parallélogramme $MNM'N'$ a pour aire $4ab$, et que c'est un losange dans le cas d'une hyperbole équilatère.

On vient de voir aussi dans le paragraphe précédent, que les milieux de toutes les cordes parallèles à ces tangentes sont aussi milieux de segments homothétiques de $[MN]$ par rapport au centre O . Le lieu du milieu de ces cordes est donc constitué de la droite (TT') privée du segment $[TT']$, on a $(TT') // (MN') // (M'N)$ car (TT') est une médiane du parallélogramme $MNM'N'$. Les milieux de $[MN']$ et $[NM']$ sont aussi les milieux de deux cordes ayant la même

direction que (TT') , le lieu du milieu des cordes parallèles à (TT') est donc la droite \mathcal{D} dirigée par \vec{u} passant par O , ce sont ces droites \mathcal{D} et (TT') qu'on appellera droites conjuguées par rapport à l'hyperbole.

III-4 Propriétés des tangentes à une hyperbole

4-1 Les 3 théorèmes de Poncelet

Il n'y a que de simples nuances entre les théorèmes de Poncelet concernant une ellipse ou une hyperbole, là où on obtenait des angles égaux, il est possible de n'obtenir que des angles supplémentaires, autrement dit les angles de droites demeurent égaux.

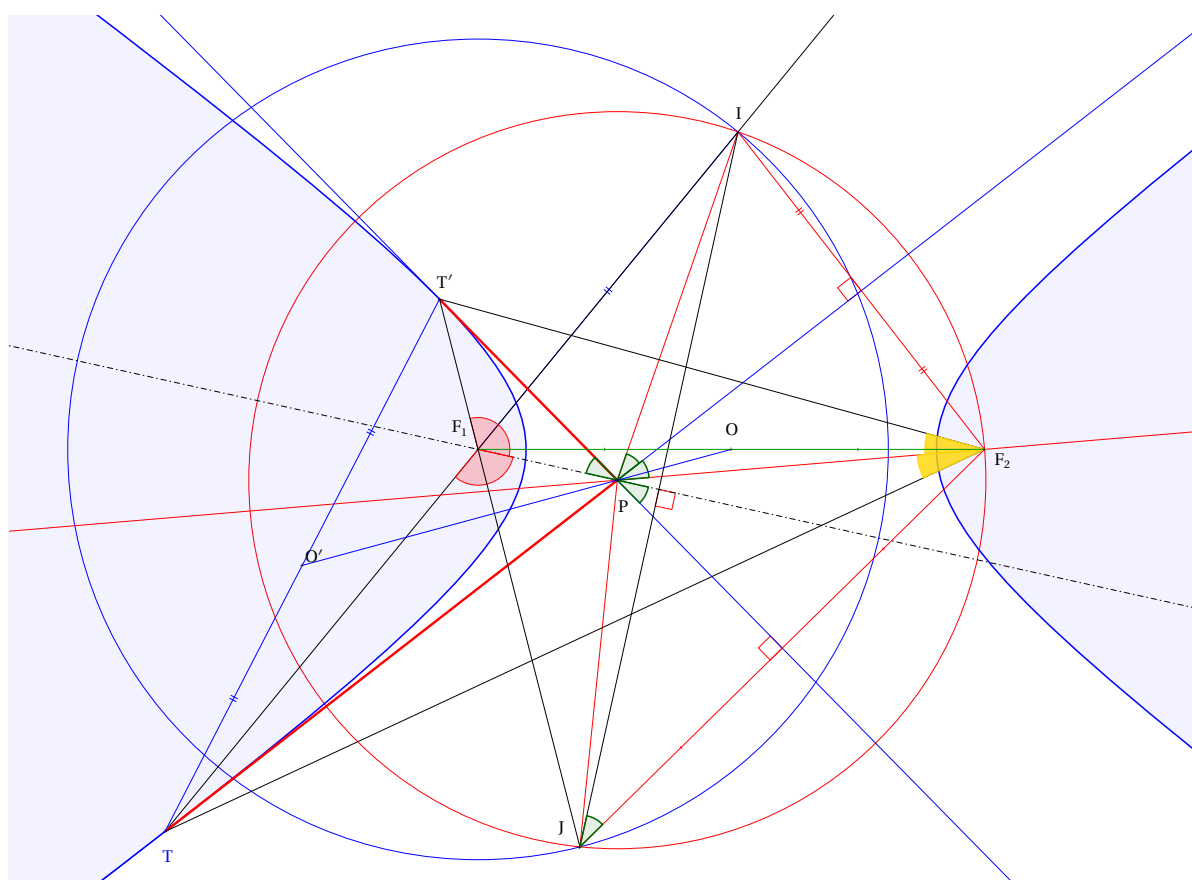


FIGURE III.10 – Illustration des 3 théorèmes de Poncelet avec points de contact sur la même branche.

THÉORÈME 8 (1^{ER} THÉORÈME DE PONCELET) *Étant donné une hyperbole de foyers F_1, F_2 dont la distance entre les deux branches est $d \in]0; F_1F_2[$, pour tout point P tel que $|PF_1 - PF_2| < d$, il existe deux droites d_1 et d_2 passant par P tangentes à l'hyperbole en des points T et T' , Les 2 segments $[PT]$ et $[PT']$, sont vus de l'un quelconque des 2 foyers sous des angles égaux si les points de contacts sont sur la même branche, ou bien sont vus sous des angles supplémentaires si les points de contacts sont sur des branches distinctes.*

Étant donné une hyperbole de foyers F_1 et F_2 , pour tracer les tangentes éventuelles passant par un point P quelconque, il faut que celui ci soit sur la médiatrice d'un segment $[XF_2]$, où

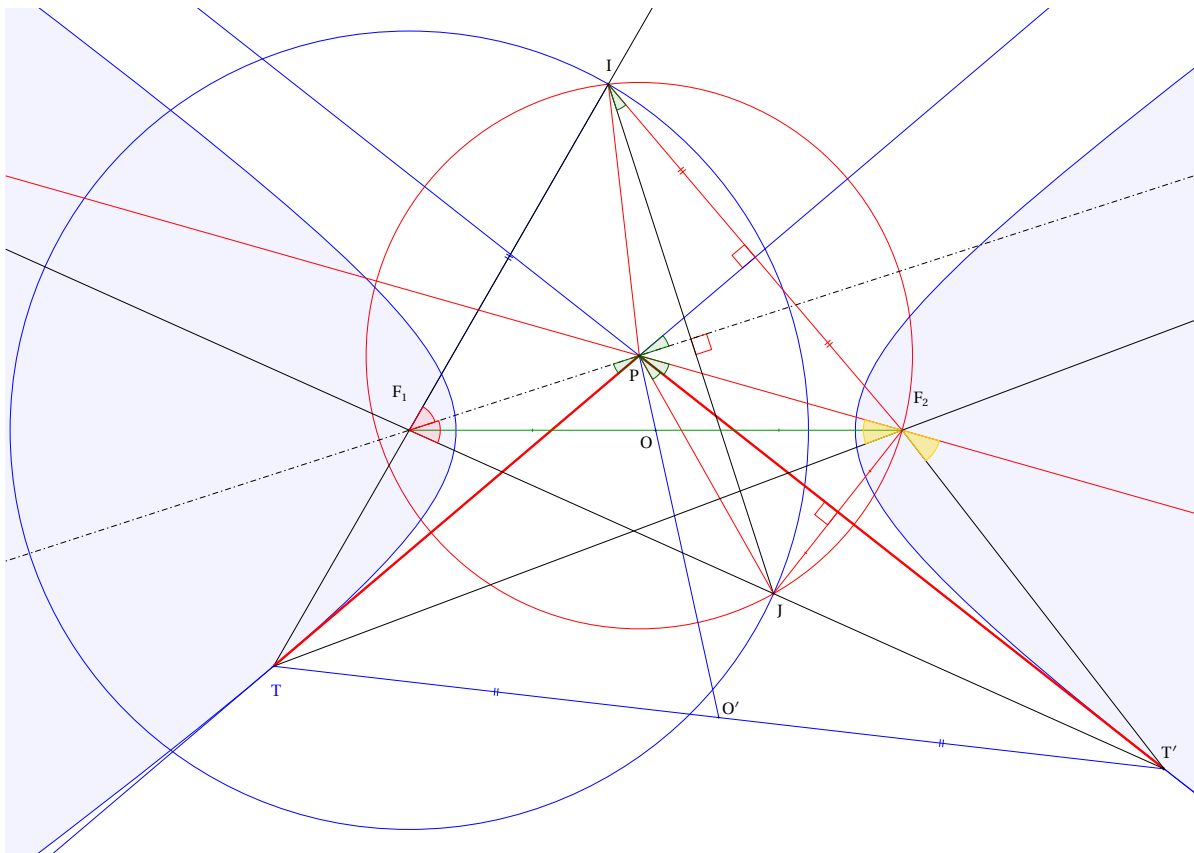


FIGURE III.11 – Illustration des 3 théorèmes de Poncelet avec points de contact sur des branches distinctes.

X est un point du cercle directeur de centre F_1 et rayon $d = 2a$. Les points X qui conviennent sont donc les points d'intersection s'ils existent du cercle directeur de centre F_1 , et du cercle de centre P passant par F_2 . Pour qu'il existe deux tels points I et J , il faut et il suffit que $|PF_2 - PF_1| < 2a$, il en est ainsi lorsque P est dans la partie non coloriée en bleu sur les figures III.10 et III.11. Désignons alors par $\mu[JF_2]$ et $\mu[IF_2]$ les médianes de $[JF_2]$ et $\mu[IF_2]$ qui passent par P , les points T et T' de l'hyperbole tels que $\{T\} = (IF_2) \cap \mu[IF_1]$ et $\{T'\} = (JF_1) \cap \mu[JF_2]$ sont bien sur l'hyperbole, car $|TF_2 - TF_1| = |TI - TF_1| = F_1I = 2a$ et $|T'F_2 - T'F_1| = |T'J - T'F_1| = F_1J = 2a$; le fait que ces médianes soient tangentes en T et T' à l'hyperbole a été justifié au paragraphe 2-4. La droite (F_1P) est médiane de $[IJ]$, les droites (TI) et $(T'J)$ sont donc symétriques par rapport à (F_1P) , d'où l'égalité angulaire $\widehat{TF_1P} = \widehat{PF_1T'}$ lorsque T et T' sont dans le même demi-plan de frontière (IJ) (voir figure III.10). Les foyers jouant des rôles interchangeables, on a aussi l'égalité $\widehat{TF_2P} = \widehat{PF_2T'}$.

Mais lorsque T et T' sont dans des demi-plans distincts de frontière (IJ) (voir figure III.11), on a $\widehat{JF_1P} = \widehat{PF_1T}$ où $\widehat{JF_1P}$ est le supplément de $\widehat{PF_1T'}$, on en déduit que $\widehat{PF_1T}$ et $\widehat{PF_1T'}$ sont supplémentaires. Dans les deux cas de figures on a donc les égalités entre angles de droites : $((F_1T); (F_1P)) = ((F_1P); (F_1T'))$, ce que l'on peut exprimer aussi en disant que (F_1P) est bissectrice des droites (F_1T) et (F_1T') .

THÉORÈME 9 (2^E THÉORÈME DE PONCELET) *Étant donné une hyperbole de foyers F_1, F_2 dont la distance entre les deux branches est $d \in]0; F_1F_2[$, pour tout point P tel que $|MF_1 - MF_2| < d$, il*

existe deux droites d_1 et d_2 passant par P tangentes à l'hyperbole, telles que les foyers soient sur des droites isogonales¹ par rapport à d_1 et d_2 .

La Conclusion du 2^e théorème de Poncelet signifie que les deux foyers de l'hyperbole sont isogonaux par rapport à deux tangentes passant par un même point P . Lorsque les points de contacts T et T' sont sur des branches différentes comme sur la figure III.11, l'angle $\widehat{F_2JI}$ inscrit dans la cercle de centre P passant par F_2 a une mesure égale celle de $\widehat{DPF_2}$, car égale à la moitié de celle de l'angle au centre $\widehat{F_2PI}$, mais il est aussi de même mesure que $\widehat{T'PF_1}$ car $(F_1P) \perp (IJ)$ et $(T'P) \perp (F_2J)$. On en déduit l'égalité des angles marqués en vert sur la figure III.11, et en particulier $\widehat{F_2PT} = \widehat{T'PF_1}$ qui exprime l'isogonalité de F_1 et F_2 par rapport aux demi-droites $[PT)$ et $[PT')$.

Mais lorsque T et T' sont sur la même branche, c'est à dire dans le même demi-plan de frontière (IJ) , on peut observer sur la figure III.10 que l'un des foyers est à l'intérieur du secteur angulaire aigu $\widehat{TPT'}$ et l'autre à l'extérieur, la conclusion du raisonnement précédent est la même, mais exprime que $\widehat{F_1PT}$ et $\widehat{F_2PT'}$ sont supplémentaires. Dans les deux cas de figures on a donc l'égalité entre angles de droites $[(PF_1), (PT')] = [(PT), (PF_2)]$.

THÉORÈME 10 (3^e THÉORÈME DE PONCELET) *Si deux demi-droites issues d'un même point P sont tangentes à une hyperbole de centre O milieu des 2 foyers, alors la droite (PO) passe par le milieu des deux points de contact entre l'hyperbole et les demi-droites.*

Pour démontrer ce théorème avec une ellipse nous avons utilisé la propriété devenue évidente dans le cas d'un cercle, puis une transformation par affinité. Dans le cas de l'hyperbole il faudrait faire intervenir un affinité qui transforme toute hyperbole en une hyperbole équilatère, mais le 3^e théorème de Poncelet n'a plus la même évidence géométrique que dans le cas du cercle. Nous utiliserons donc les équations des tangentes à une hyperbole quelconque, on obtient une démonstration de ce théorème pour l'hyperbole, directement adaptable au cas de l'ellipse.

Soient deux tangentes en les points $T(x_0; y_0)$ et $T'(x_1; y_1)$ d'une hyperbole d'équation $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, dans une repère dont l'origine est O milieu des foyers F_1 et F_2 , elles ont pour équation $\frac{x_0}{a^2}x - \frac{y_0}{b^2}y = 1$ et $\frac{x_1}{a^2}x - \frac{y_1}{b^2}y = 1$ (voir paragraphe 3-3). Les coordonnées du point P

d'intersection de ces deux tangentes vérifient donc le système
$$\begin{cases} b^2x_0 \cdot x_P - a^2y_0 \cdot y_P = a^2b^2 \\ b^2x_1 \cdot x_P - a^2y_1 \cdot y_P = a^2b^2 \end{cases}$$
,

dont la solution est $(x_P; y_P) = \left(\frac{a^2(y_0 - y_1)}{y_0x_1 - x_0y_1} ; \frac{b^2(x_0 - x_1)}{y_0x_1 - x_0y_1} \right)$. Le déterminant des coordonnées de P et du milieu O' de $[TT']$ est donc égal à

$$\Delta = \frac{a^2(y_0 - y_1)(y_0 + y_1) - b^2(x_0 - x_1)(x_0 + x_1)}{2(y_0x_1 - x_0y_1)}$$

$$\Delta = \frac{a^2b^2}{2(y_0x_1 - x_0y_1)} \left(\frac{y_0^2}{b^2} - \frac{y_1^2}{b^2} - \frac{x_0^2}{a^2} + \frac{x_1^2}{a^2} \right)$$

Or ce déterminant est nul car les coordonnées des points T et T' vérifient $\frac{x_0^2}{a^2} - \frac{y_0^2}{b^2} = \frac{x_1^2}{a^2} - \frac{y_1^2}{b^2} = 1$, cela prouve que l'origine O du repère est aligné avec les points P et O' .

1. Voir annexe A-2 pour plus de précisions sur les notions d'isogonalité.

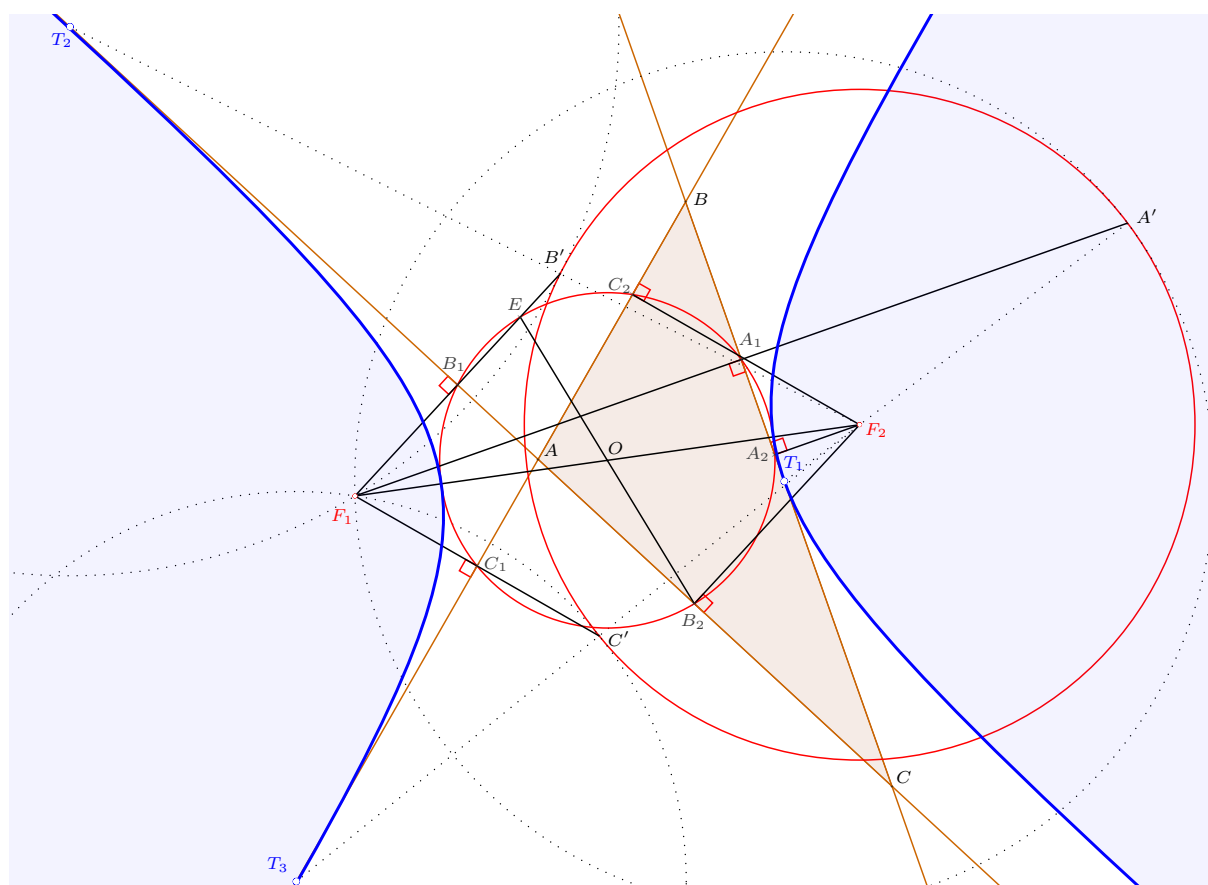


FIGURE III.12 – Construction d'une l'hyperbole tangente aux trois côtés d'un triangle.

4-2 Recherche d'une hyperbole tangente aux trois côtés d'un triangle

De la même manière que pour une ellipse, nous avons vu que toute tangente à une hyperbole de foyers F_1 et F_2 , est médiatrice d'un segment $[F_2X]$ où X un point de son cercle directeur centré sur l'autre foyer F_1 , le point de contact entre l'hyperbole et sa tangente est le point d'intersection de cette médiatrice et de la droite (XF_1) . Mais lorsque X parcourt le cercle directeur, il existe deux positions pour lesquelles la médiatrice de $[F_1X]$ est parallèle à (XF_2) (voir figures III.5 et III.6), ces deux médiatrices particulières sont les asymptotes de l'hyperbole comme expliqué en 3-3. Si l'on projette un foyer d'une hyperbole sur une tangente ou une asymptote à cette hyperbole, on obtient dans les deux situations un point sur le cercle principal, car il est le transformé par homothétie de centre ce foyer et rapport $\frac{1}{2}$, du cercle directeur centré sur l'autre foyer (voir figure III.5). Pour obtenir une hyperbole tangente aux trois côtés d'un triangle on peut donc procéder donc comme pour l'ellipse en II-6-4, en fixant arbitrairement un point susceptible d'être l'un de ses foyers. Les trois projetés orthogonaux de ce premier foyer sur les côtés du triangle ne doivent pas être alignés, pour permettre la construction du cercle principal passant par ces trois points. Mais contrairement à l'ellipse, il faut que les foyers soient extérieurs au cercle principal, pour que la conique obtenue à partir du foyer choisi et du cercle directeur déduit du cercle principal, soit une hyperbole. C'est seulement après avoir étudié tous les types de coniques non dégénérées, que nous pourrons élucider en V-6,

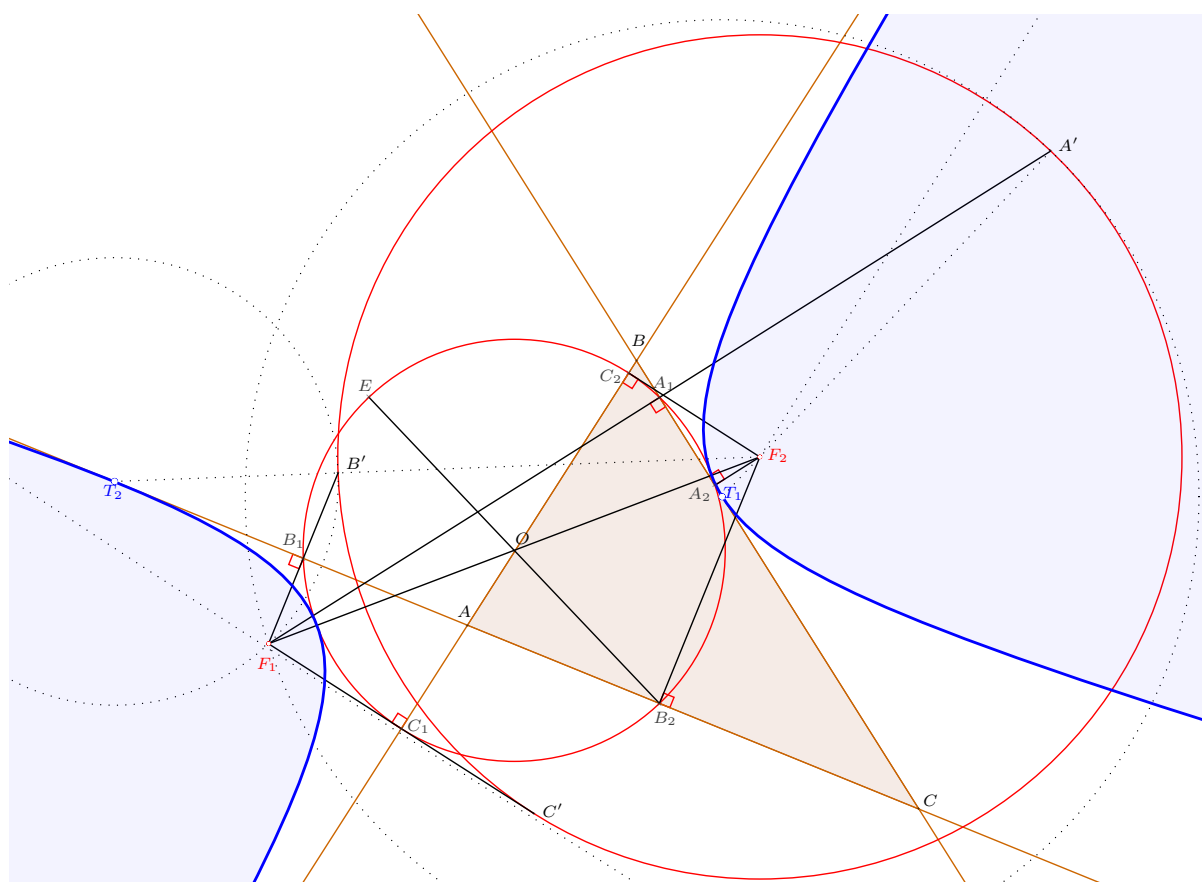


FIGURE III.13 – Le côté $[AB]$ est sur la médiatrice de $[F_1C']$ qui est donc asymptote de l'hyperbole tangente aux 2 autres côtés du triangle en T_1 et T_2 .

après avoir étudié les paraboles, quel doit être l'emplacement du foyer fixé par avance pour obtenir une conique qui soit une hyperbole, comme sur la figure III.12. Nous constaterons aussi l'existence de cas particuliers où la notion de droite tangente doit être généralisée, et inclure les asymptotes de l'hyperbole (tangente en un point rejeté à l'infini). Il est donc possible que l'un des côtés du triangle ne soit pas une tangente au sens strict du terme, car il pourra être sur une asymptote lorsque l'un des trois projetés orthogonaux de F_1 est sommet d'un triangle rectangle d'hypoténuse $[OF_1]$, comme sur la figure III.13.

4-3 Cercle orthoptique

Si comme pour l'ellipse, on cherche l'ensemble des points P pour lesquels, les deux droites tangentes à l'hyperbole issues de ce point sont perpendiculaires, il n'y a pas toujours de solution. Au paragraphe 2-3, nous avons vu en construisant une hyperbole à partir de l'un de ses cercles directeurs, que ses tangentes passant par un point P quelconque, doivent être les médiatrices d'un segment $[XF]$ où F est un foyer de l'hyperbole et X un point de \mathcal{C} , où \mathcal{C} désigne le cercle directeur de rayon $d = 2a$ centré sur le deuxième foyer F' . Pour que P appartienne à ces médiatrices, il faut qu'il soit équidistant de F et de $X \in \mathcal{C}$; pour qu'il existe des points tel que X , il faut que P appartienne au domaine tel que $|PF - PF'| \leq 2a$, auquel cas il en existe un ou deux que nous nommons H et G , à l'intersection de \mathcal{C} et du cercle de centre P passant par F .

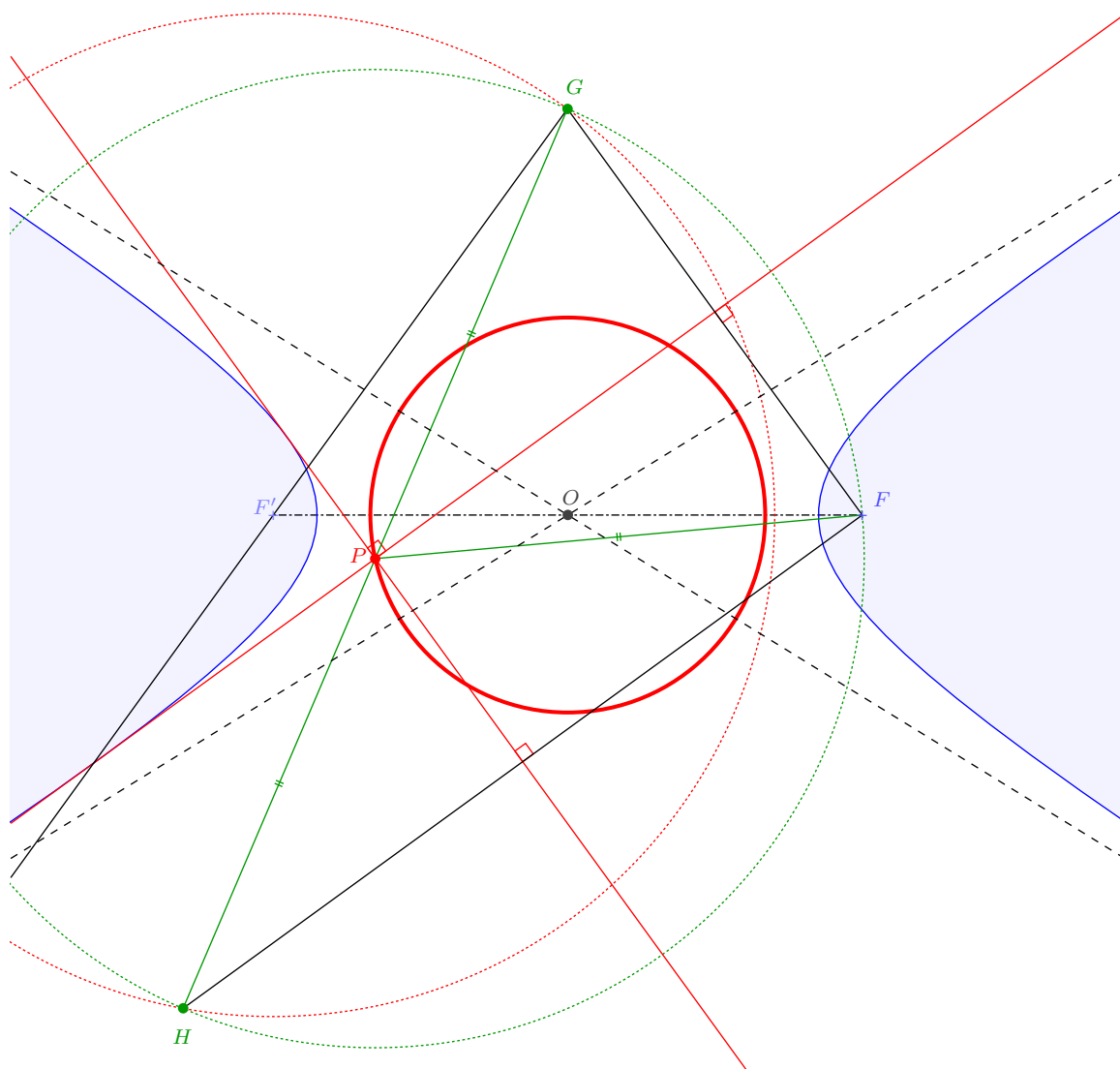


FIGURE III.14 – Point P sur deux droites perpendiculaires, tangentes à la même branche de l’hyperbole.

Pour que ces médiatrices de deux côtés du triangle FGH soient perpendiculaires il faut que P , centre du cercle circonscrit à FGH soit milieu de $[GH]$. Le point P appartient donc à la droite (GH) qui est axe radical de \mathcal{C} et du cercle de centre P passant par F_2 , c’est à dire la droite où se situent tous les points ayant même puissance par rapport à ces deux cercles.

Le calcul de la puissance de P par rapport à ces 2 cercles nous fournit donc l’égalité : $PF'^2 - 4a^2 = -PF^2$, en reprenant les notations habituellement utilisées pour établir nos équations cartésiennes : $c = \frac{FF'}{2}$ et $b^2 = c^2 - a^2$, on en déduit :

$$4a^2 = PF'^2 + PF^2 = (\overrightarrow{PO} + \overrightarrow{OF'})^2 + (\overrightarrow{PO} + \overrightarrow{OF})^2 = 2PO^2 + 2c^2$$

$$\text{Donc : } OP^2 = 2a^2 - c^2 = a^2 - b^2$$

Il n’existe donc de point P qu’à la condition que $a^2 > b^2$, on doit donc avoir $2a^2 > c^2$. Dans le paragraphe suivant, nous allons voir que le paramètre $e = \frac{c}{a}$ est l’excentricité de l’hyperbole,

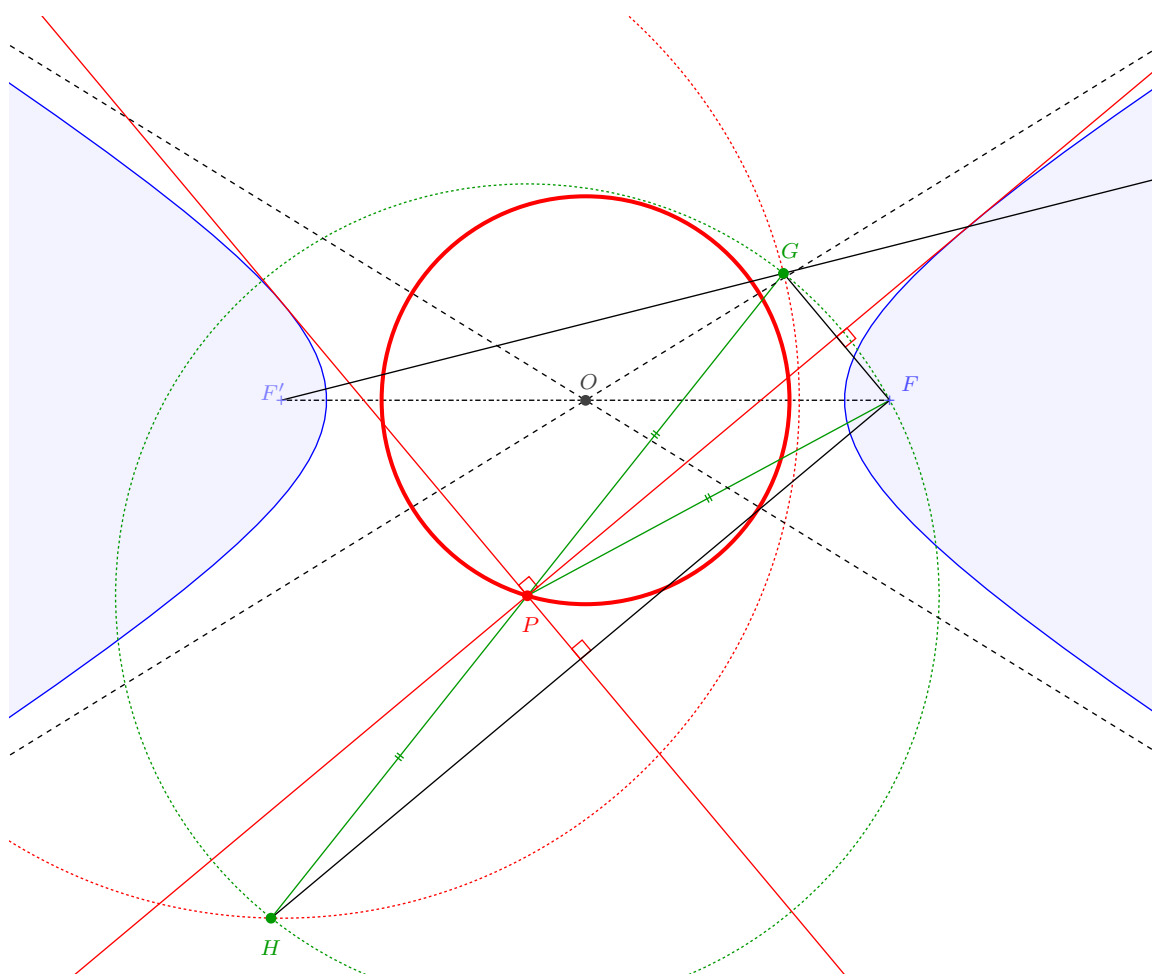


FIGURE III.15 – Point P sur deux droites perpendiculaires, tangentes à des branches distinctes.

qui permet de la définir comme pour l'ellipse, par un seul de ses deux foyers et une droite directrice associée, il doit donc vérifié $e < \sqrt{2}$. les hyperboles d'excentricité $e \in]1; \sqrt{2}[$ seulement, admettent donc un cercle orthoptique de centre O et rayon $\sqrt{a^2 - b^2} = a\sqrt{2 - e^2}$. Selon l'emplacement du point P sur le cercle orthoptique par rapport aux asymptotes de l'hyperbole, les droites peuvent être tangentes à la même branche, ou bien à des branches distinctes, comme illustré par les figures III.14 et III.15. où le cercle rouge est le cercle orthoptique de l'hyperbole en bleu.

III-5 Propriétés déduites de la définition par foyer, directrice et excentricité

5-1 Directrice et excentricité d'une hyperbole

Sur la figure III.1 en 3 dimensions, on peut remarquer le rôle particulier joué par les droites (H_1K_1) et (H_2K_2) d'intersection, du plan de l'hyperbole et ses 2 plans parallèles qui contiennent les cercles de contact entre le cône et les 2 sphères. Étant donné le point M de l'hyperbole, si H_1 et H_2 sont les projetés orthogonaux de M sur ces deux droites parallèles, comme au paragraphe

5-1 du chapitre sur l'ellipse on peut justifier que $(H_1H_2) \parallel (F_1F_2)$, les distances H_1H_2 et M_1M_2 sont donc des constantes qui permettent d'exprimer de plusieurs façons la distance d entre les 2 plans parallèles : $d = H_1H_2 \cos \beta = M_1M_2 \cos \alpha$; on en déduit $\frac{M_1M_2}{H_1H_2} = \frac{\cos \beta}{\cos \alpha}$. Le parallélisme de (H_1M_1) et (H_2M_2) permet l'application du théorème de Thalès aux triangles MM_1H_1 et MM_2H_2 et d'établir l'égalité $\frac{MM_1}{MH_1} = \frac{MM_2}{MH_2} = \frac{M_1M_2}{H_1H_2}$ qui montre que : $\frac{MF_1}{MH_1} = \frac{MF_2}{MH_2} = \frac{\cos \beta}{\cos \alpha} > 1$ pour tout $M \in \mathcal{H}$, car $MM_1 = MF_1$, $MM_2 = MF_2$ et $0 < \beta < \alpha < \frac{\pi}{2}$.

Comme pour l'ellipse on continuera à appeler excentricité de l'hyperbole, le nombre $e = \frac{\cos \beta}{\cos \alpha}$, mais dans le cas de l'hyperbole, on aura $e \in]1; +\infty[$. En associant e au couple $(F_1; (H_1K_1))$ ou $(F_2; (H_2K_2))$, on peut caractériser notre courbe de manière unique, et nous continuerons à appeler directrices de l'hyperbole, ces droites $\mathcal{D}_1 = (H_1K_1)$ et $\mathcal{D}_2 = (H_2K_2)$.

On peut retrouver ces éléments caractéristiques d'une hyperbole à partir de son équation cartésienne. En reprenant les calculs du paragraphe III-3, qui nous ont permis d'établir une forme simplifiée de l'équation cartésienne de l'hyperbole dans un repère bien choisi, on avait : $r_1 = MF_1 = \left| a - \frac{cx}{a} \right|$ et $r_2 = MF_2 = \left| a + \frac{cx}{a} \right|$. On a donc $r_1 = \frac{c}{a} \left| \frac{a^2}{c} - x \right|$ et $r_2 = \frac{c}{a} \left| \frac{a^2}{c} + x \right|$, où les nombres $\left| \frac{a^2}{c} \pm x \right|$ sont les distances entre M et les droites d'équations $x = \pm \frac{a^2}{c}$, l'excentricité e s'exprime donc par le rapport $\frac{c}{a} = \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}}$.

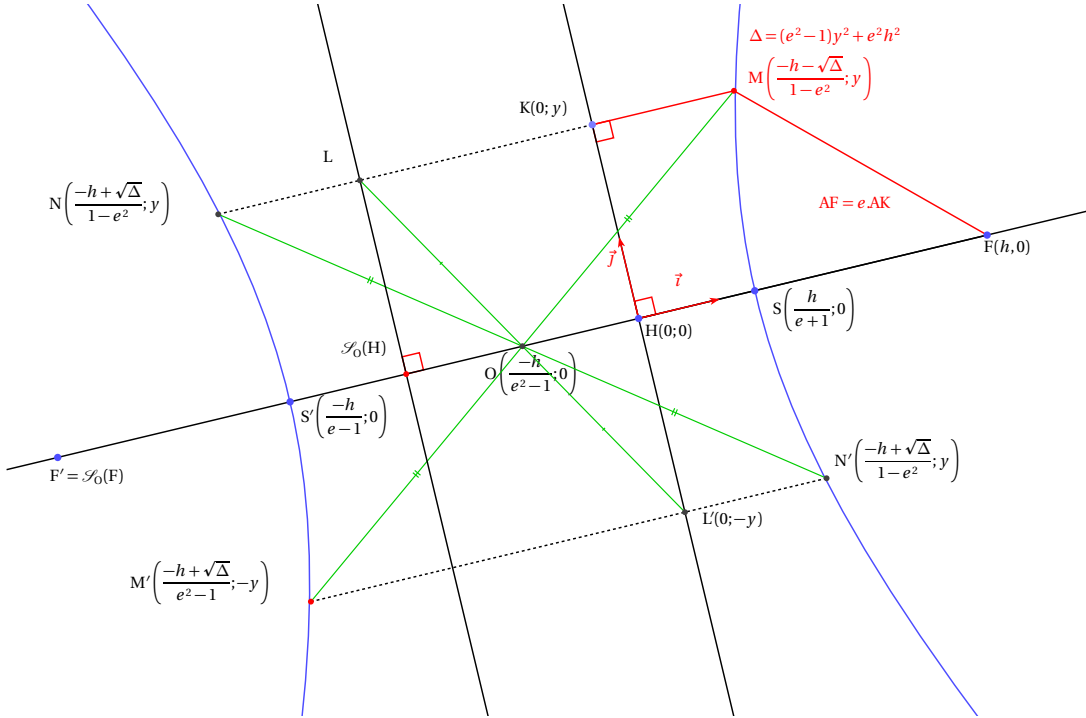
La mesure α de l'angle de droites entre une asymptote et l'axe focal est telle que $\tan \alpha = \pm \frac{b}{a}$, elle peut aussi servir à exprimer l'excentricité, car on a $\tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} - 1 = \frac{b^2}{a^2} = e^2 - 1$, donc $e = \frac{1}{\cos \alpha}$. On en déduit que l'excentricité d'une hyperbole croît avec la valeur absolue de la mesure de l'angle entre ses asymptotes et l'axe focal. Les asymptotes sont perpendiculaires lorsque $\alpha = \frac{\pi}{4}$, l'excentricité d'une hyperbole équilatère est donc $\sqrt{2}$.

5-2 Définition par foyer, directrice et excentricité

L'excentricité et les directrices d'une hyperbole définie dans le paragraphe précédent permettent de proposer une 3^e définition de l'hyperbole, nous montrerons qu'elle est équivalente aux précédentes, en retrouvant les foyers et la distance entre les deux branches de la courbe ainsi définie.

DÉFINITION 10 *Dans un plan euclidien Π , étant donné un point F appelé foyer, une droite d appelée directrice ne contenant pas F et un réel $e \in]1; +\infty[$ appelé excentricité, l'ensemble des points M tels que $MF = e.MK$ où K est le projeté orthogonal de M sur d , est une hyperbole.*

Comme pour l'ellipse, on peut déterminer un centre O de symétrie, ce qui nous permettra d'affirmer l'existence d'un deuxième couple foyer, directrice, symétrique du premier par rapport à O , qui permet de définir le même ensemble de points. Soit H le projeté de F sur d et h la distance FH . On se place dans un repère orthonormé (H, \vec{i}, \vec{j}) tel que $\vec{i} = \frac{\overrightarrow{HF}}{HF}$; h est alors l'abscisse du foyer et \vec{j} est un vecteur directeur de d . Dans ce repère étant donné un point

FIGURE III.16 – Hyperbole de foyer F directrice (KH) et excentricité $e = 2$.

$M(x; y)$, on a $MF^2 = (x - h)^2 + y^2$ et $MK = |x|$, il doit vérifier l'équation :

$$(x - h)^2 + y^2 = (ex)^2 \iff (1 - e^2)x^2 - 2hx + y^2 + h^2 = 0$$

Pour y fixé, le discriminant réduit de cette équation en x est $\Delta = h^2 - (1 - e^2)(y^2 + h^2) = (e^2 - 1)y^2 + e^2h^2$, étant donné que $e > 1$, pour tout $y \in \mathbb{R}$ le discriminant réduit Δ vérifie $\Delta \geq e^2h^2 > 0$ et on a $x = \frac{h \pm \sqrt{\Delta}}{1 - e^2}$. Or $\sqrt{\Delta} \geq he$, on a donc $\sqrt{\Delta} \geq he$ et $x \in]-\infty; \frac{h}{1 - e}] \cup [\frac{h}{e + 1}; +\infty[$.

Étant donné un réel y quelconque, on a donc toujours deux paires de points de même ordonnée $\pm y$ sur notre courbe, dont la moyenne des d'abscisses est $\frac{h}{1 - e^2}$. L'ensemble de points \mathcal{H} que nous venons de définir, possède donc deux axes de symétrie : l'axe des abscisses et l'axe d'équation $x = \frac{h}{1 - e^2}$, le point $O\left(\frac{h}{1 - e^2}; 0\right)$ est donc centre de symétrie. On peut donc obtenir un deuxième foyer F' et une deuxième directrice d' symétriques respectifs de F et d par rapport à O , tels que l'on ait aussi $MF' = eML$, où L est le projeté orthogonal de M sur d' . Cette dernière égalité se justifie par le fait que, si $M \in \mathcal{H}$, alors $M' = \mathcal{S}_O(M)$ doit aussi appartenir à \mathcal{H} , et donc $M'F = eM'L'$ où L' est le projeté orthogonal de M' sur d' , par symétrie par rapport au point O on obtient l'égalité $MF' = eML$. On en déduit $MF' - MF = e(ML - MK)$, on peut observer sur la figure III.16 que $M \in \mathcal{H}$ est toujours à l'extérieur du segment $[KL]$, donc $MF' - MF = \pm eKL$ et $|MF' - MF|$ est donc égale à la constante eKL . Nous retrouvons selon la définition III-3, une hyperbole de foyers F et F' , la distance entre ses branches est $eKL = \frac{2he}{1 - e^2}$, ses sommets sont les points $S\left(\frac{h}{1 + e}; 0\right)$ et $S'\left(\frac{h}{1 - e}; 0\right)$. On pourrait aussi définir l'hyperbole par l'un des trois moyens suivants :

- par ses deux directrices et son excentricité,

puisque dans cette situation on peut calculer h , il suffit pour cela d'utiliser la distance entre les deux directrices $2OH = \frac{2h}{e^2 - 1}$, on peut ainsi calculer $h = (1 - e^2)OH$ qui permet de déterminer l'emplacement des foyers ;

- par ses deux foyers et ses deux directrices,

cela détermine le centre de symétrie O et l'on peut retrouver l'excentricité $e = \sqrt{\frac{OF}{OH}}$, ou bien la demi-distance entre les branches $OS = \sqrt{OF \times OH}$;

- par ses deux foyers et son excentricité,

dans cette situation on peut retrouver la distance entre les branches $SS' = \frac{FF'}{e}$.

5-3 Équation en coordonnées polaires

Pour établir une équation en coordonnées polaires de l'hyperbole \mathcal{H} de foyer F , directrice d et excentricité e , considérons le repère orthonormé direct (F, \vec{u}, \vec{v}) où \vec{u} est le vecteur unitaire orthogonal à la directrice, dont on a choisi le sens allant du foyer F vers la directrice d , soit H le projeté orthogonal de F sur d , nous poserons $FH = h$. (voir figure III.17). Nous noterons $\vec{u}(\theta)$ le vecteur obtenu par application au vecteur \vec{u} de la rotation de mesure θ , en particulier $\vec{v} = \vec{u}(\frac{\pi}{2})$.

Tout point $M \in \mathcal{H}$ admet un couple de coordonnées polaires $[r, \theta] \in]0; +\infty[\times \mathbb{R}$ dans le repère (F, \vec{u}, \vec{v}) , soit K son projeté orthogonal sur d , on a $MK = |h - r \cos \theta|$ et $M \in \mathcal{H}$ si et seulement si $e.MK = MF \Leftrightarrow e(h - r \cos \theta) = \pm r$, considérons les deux cas suivants :

1^{er} cas : $e(h - r \cos \theta) > 0$.

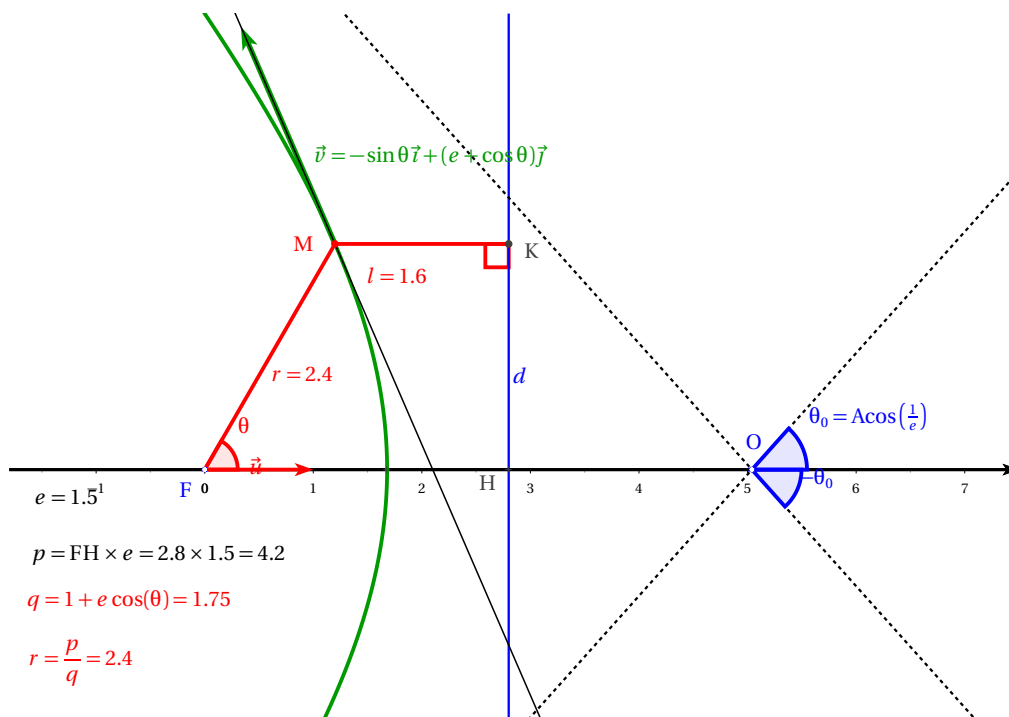


FIGURE III.17 – M parcourt la branche d'hyperbole à gauche, lorsque $\theta \in]-\pi + \text{Acos}\frac{1}{e}; \pi - \text{Acos}\frac{1}{e}[$.

nous avons $r = \frac{eh}{1 + e \cos \theta}$ supposé positif, il faut pour cela que θ soit équivalent modulo

2π à un réel dans l'intervalle $]-\pi + \text{Acos}\frac{1}{e}; \pi - \text{Acos}\frac{1}{e}[$, tous les points de \mathcal{H} de coordonnées polaires $[r, \theta]$ avec r positif doivent donc vérifier l'équation $r = \frac{he}{1 + e \cos \theta}$, lorsque θ parcourt l'intervalle $]-\pi + \text{Acos}\frac{1}{e}; \pi - \text{Acos}\frac{1}{e}[$. L'abscisse d'un tel point est $\frac{he \cos \theta}{1 + e \cos \theta} < h$, on obtient donc les points de l'hyperbole situés dans le demi-plan de frontière la directrice d et contenant le foyer F . Si F' désigne le 2^e foyer, Il s'agit de tous les points M de la branche pour laquelle $MF - MF'$ est une constante négative. Sur la figure III.17, lorsque θ croît de $(-\pi + \text{Acos}\frac{1}{e})$ à $(\pi - \text{Acos}\frac{1}{e})$, on obtient la branche d'hyperbole représentée en vert parcourue de bas en de haut.

2^e cas : $e(h - r \cos \theta) = -r$.

nous avons $r = \frac{eh}{-1 + e \cos \theta}$ supposé positif, étant donné que $\frac{1}{e} \in]0; 1[$, c'est le cas si et seulement si θ est équivalent modulo 2π à un réel dans l'intervalle $]-\text{Acos}\frac{1}{e}; \text{Acos}\frac{1}{e}[$. Les points obtenus ont pour coordonnées polaires $[\frac{he}{-1 + e \cos \theta}; \theta]$, on peut aussi considérer que leurs coordonnées polaires sont $[\frac{he}{1 + e \cos(\theta + \pi)}; \theta + \pi]$, avec un rayon ou première coordonnée négative opposée de la précédente. Posons $\theta' = \theta + \pi$, on obtient des points de coordonnées polaires $[r', \theta'] \in]-\infty; 0[\times]\pi - \text{Acos}\frac{1}{e}; \pi + \text{Acos}\frac{1}{e}[$, qui vérifient l'équation $r' = \frac{he}{1 + e \cos \theta'}$. Les abscisses de ces points sont $\frac{he \cos \theta'}{1 + e \cos \theta'} > h$ car $1 + e \cos \theta' < 0$, on obtient donc les points de l'hyperbole situés dans le demi-plan de frontière la directrice d ne contenant pas le foyer F . Sur la figure III.18, on obtient ainsi tous les points M de la branche pour laquelle $MF - MF'$ est une constante positive, lorsque θ croît de $(\pi - \text{Acos}\frac{1}{e})$ à $(\pi + \text{Acos}\frac{1}{e})$, elle est parcourue de bas en de haut.

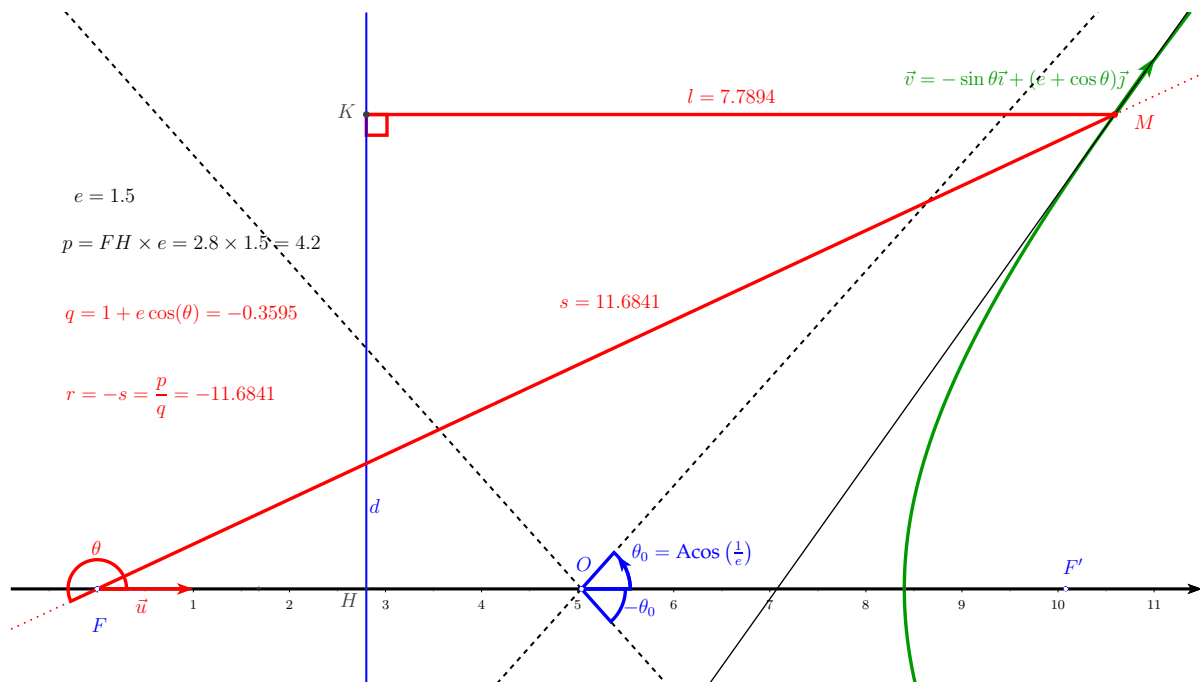


FIGURE III.18 – M parcourt la branche d'hyperbole à droite, lorsque $\theta \in]\pi - \text{Acos}\frac{1}{e}; \pi + \text{Acos}\frac{1}{e}[$.

Lorsque θ parcourt la réunion des deux intervalles précédents : $]-\pi + \text{Acos}\frac{1}{e}; \pi + \text{Acos}\frac{1}{e}[$ on obtient l'ensemble des points des deux branches de l'hyperbole. Tous admettent donc un unique couple de coordonnées polaires $[r, \theta]$ avec $\theta \in]-\pi + \text{Acos}\frac{1}{e}; \pi + \text{Acos}\frac{1}{e}[\setminus \{\pi - \text{Acos}\frac{1}{e}\}$, qui vérifie l'équation $r = \frac{he}{e \cos \theta + 1}$. La 1^e coordonnée polaire r peut être négative, c'est le cas si $\theta \in]\pi - \text{Acos}\frac{1}{e}; \pi + \text{Acos}\frac{1}{e}[$, on obtient alors un point de \mathcal{H} sur la demi-droite opposée à celle d'origine F dirigée et orientée par $\vec{u}(\theta)$ (voir figure III.18). Pour déterminer la deuxième coordonnée polaire, on pourrait utiliser tout autre intervalle d'amplitude 2π , auquel il faut ôter les réels équivalents modulo 2π à $\pm \text{Acos}\frac{1}{e} + \pi$ qui mesurent les angles entre \vec{u} et un vecteur directeur des asymptotes.

5-4 Tangentes et directrices

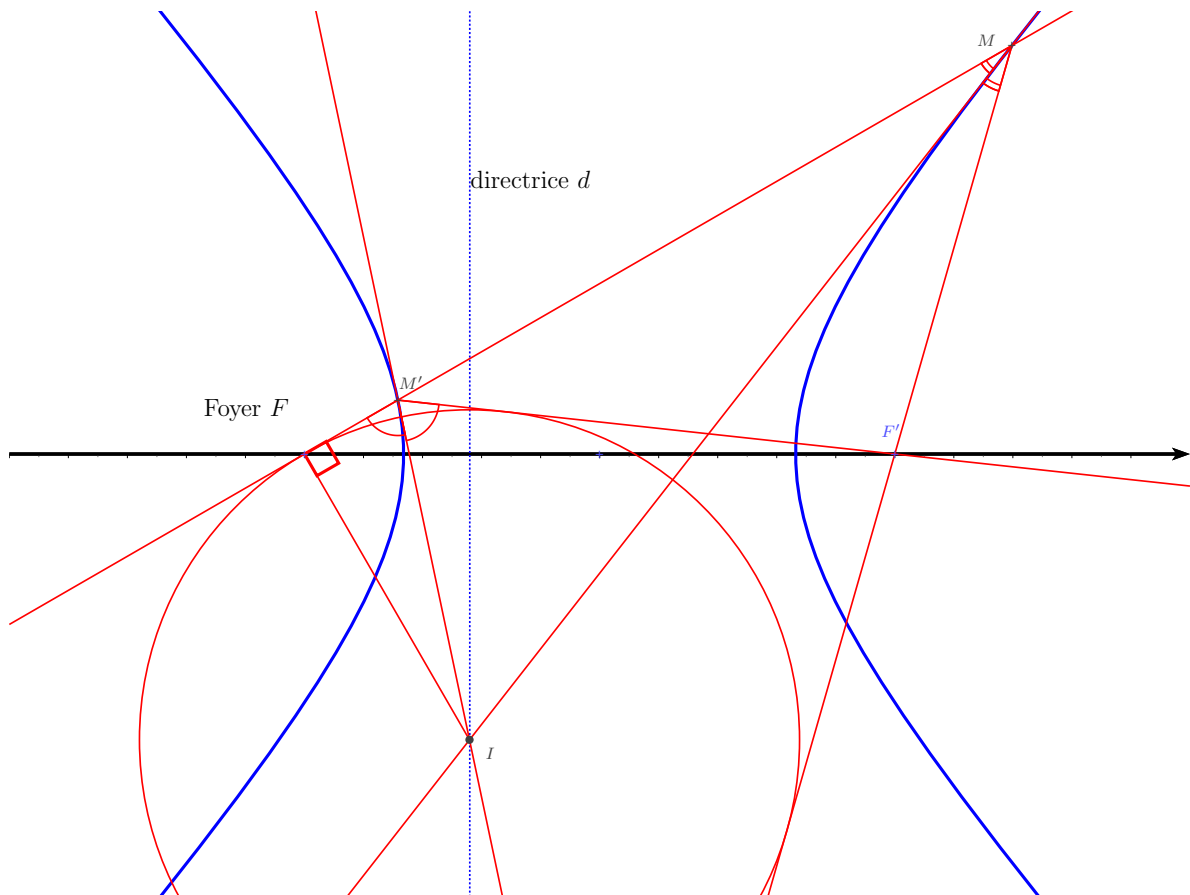


FIGURE III.19 – Les tangentes à une hyperbole en des points M et M' alignés avec le foyer F , ont leur intersection I est située sur la directrice associée à ce foyer F , ce point I se projette orthogonalement en F sur (MM') . Si M et M' sont sur une même branche de l'hyperbole, alors I est le centre d'un cercle exinscrit du triangle $MM'F'$

Nous avons obtenu la même expression pour l'équation en coordonnées polaires de l'hyperbole ou de l'ellipse (voir paragraphe II.13), la seule nuance est que pour l'ellipse nous avons $e \in]0; 1[$ et r défini pour tout θ , alors que pour l'hyperbole nous avons $e \in]1; +\infty[$ et que r

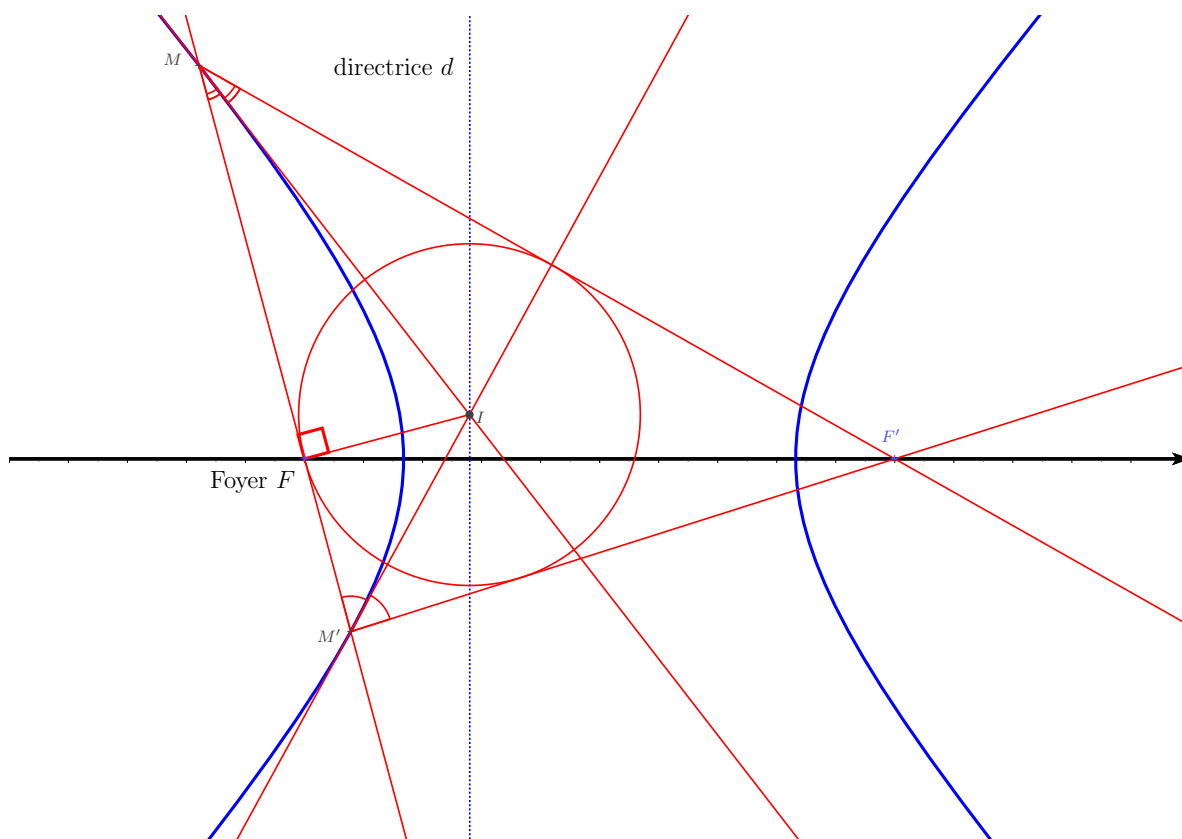


FIGURE III.20 – Les tangentes à une hyperbole en des points M et M' alignés avec le foyer F , ont leur intersection I située sur la directrice associée à ce foyer F , ce point I se projette orthogonalement en F sur (MM') . Si M et M' sont sur chacune des deux branches de l'hyperbole, alors I est le centre du cercle inscrit dans le triangle $MM'F$

ne peut être défini pour les valeurs de θ qui annulent $1 + e \cos \theta$. Nous avons donc la même représentation paramétrique dans le repère orthonormé (F, \vec{u}, \vec{v}) pour l'hyperbole, que celle

envisagée au paragraphe II5-3 pour l'ellipse :

$$\begin{cases} x(\theta) = \frac{p \cos \theta}{1 + e \cos \theta} \\ y(\theta) = \frac{p \sin \theta}{1 + e \cos \theta} \end{cases}, \text{ ainsi que la même}$$

équation $(e + \cos \theta)x + \sin \theta y = p$ pour la tangente en $M(x(\theta); y(\theta))$. On a donc le théorème suivant valable pour l'ellipse ou l'hyperbole illustré par les figures II.14 et III.19 :

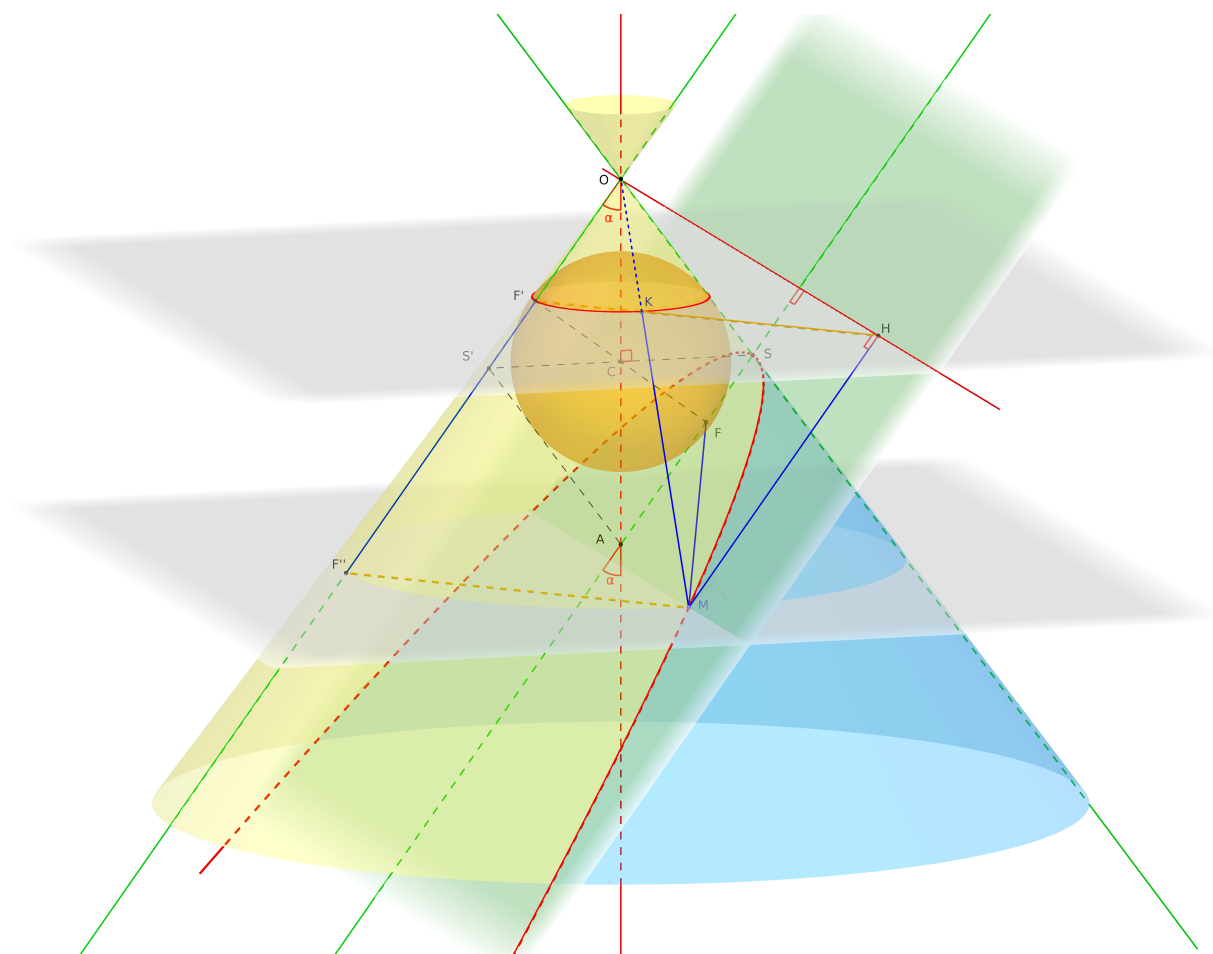
THÉORÈME 11 *Étant donné deux points M et M' sur une conique bifocale admettant F et F' pour foyers, si l'un des foyers est sur la droite (MM') , alors les tangentes à cette conique en M et M' se coupent sur la directrice relative au foyer aligné avec M et M' , en un point I dont le projeté orthogonal sur (MM') est ce foyer, I est de plus centre d'un cercle inscrit ou exinscrit au triangle dont les sommets sont M , M' et l'autre foyer.*

Chapitre IV

Parabole

IV-1 Parabole vue comme section conique particulière

1-1 Section du cône



$$MF = MK = F'F'' = MH$$

FIGURE IV.1 – parabole obtenue par section plane d'un cône.

Étant donné le cône \mathcal{C} de sommet O et axe (OA) , nous allons étudier les propriétés de l'intersection avec un plan Π passant par A (en vert sur la figure IV.1), qui fait avec (OA) un angle de mesure α égale à celle du demi-angle du cône. Si on considère la droite d , projection orthogonale de l'axe du cône sur le plan Π , elle intercepte le cône en S . Le triangle ASO est isocèle en S avec deux angles à la base de mesure α , on peut donc construire S' tel que $ASOS'$ soit un losange. Le plan qui contient d et l'axe du cône coupe le cône selon les deux génératrices (OS) et (OS') symétriques par rapport à l'axe (OA) , telle que la mesure commune de \widehat{AOS} et $\widehat{AOS'}$ soit α . L'intersection des diagonales de $ASOS'$ est un point C équidistant des 4 côtés de ce losange, ce point est donc le centre d'une sphère tangente au plan Π en un point $F \in (AS)$ et au cône selon un cercle de même axe que le cône; d'après les propriétés d'un losange ce cercle passe par F' symétrique de F par rapport à C , soit le plan \mathcal{P}' en gris sur la figure IV.1 contenant ce cercle.

On peut remarquer que la droite $d = (AS)$ est perpendiculaire à la droite \mathcal{D} intersection des deux plans Π et Π' perpendiculaires au plan (AOS) , la droite \mathcal{D} est donc perpendiculaire à toute droite de AOS et d en particulier. Parmi les deux nappes du cône symétriques par rapport à O , seule celle qui contient le point S est interceptée par Π , car Π est parallèle à la génératrice (OS') étant donné que $(OS') // (AS) \subset \Pi$, Partant d'un point M quelconque de la courbe d'intersection de ces deux surfaces, construisons les trois points suivants :

- K , intersection de la génératrice (OM) avec le plan Π' , K est aussi le point de contact entre la sphère et la génératrice (OM) du cône tangente à cette sphère.
- H , projeté de M sur Π' parallèlement à (AS) , il est nécessairement sur la droite $\mathcal{D} = \Pi \cap \Pi'$
- et F'' , 4^e sommet du parallélogramme $MHF'F''$, il est nécessairement sur la génératrice (OS') étant donné que $(OS') // (AS) // (MH)$.

D'après le lemme 1 des segments tangents à une sphère, on a donc $MK = MF$, de plus $[MK]$ et $[F''F']$ sont deux segments de génératrices du cône, compris entre les deux plans en jaune sur la figure IV.1 parallèles et perpendiculaires à l'axe du cône, on a donc $MK = F''F$, en tenant compte du fait que $MHF'F''$ est un parallélogramme, on en déduit $MF = MH$. La droite \mathcal{D} joue donc le même rôle particulier que les directrices d'une ellipse ou d'une hyperbole, le point H est en effet le projeté orthogonal de $M \in \Pi$ sur \mathcal{D} parallèlement à la droite (AS) car $(MH) \perp d$ étant donné que $(MH) // (AS) \perp \mathcal{D}$. Cela prouve que tout point $M \in \Pi \cap \mathcal{C}$ vérifie l'égalité : $MF = MH$ où H est le projeté orthogonal de M sur la droite \mathcal{D} , M décrit donc une courbe plane ensemble des points équidistants de F et \mathcal{D} .

1-2 Définition et construction par foyer et directrice

Nous venons d'observer des courbes dont chaque point est équidistant d'une droite et d'un point, cela nous amène à poser cette première définition d'une parabole.

DÉFINITION 11 *Dans un plan euclidien Π , étant donné un point F et une droite \mathcal{D} , la parabole de foyer F et directrice \mathcal{D} , est l'ensemble des points équidistants de \mathcal{D} et F , c'est à dire l'ensemble des points M tels que $MF = MH$, où H est le projeté orthogonal de M sur \mathcal{D} .*

Désignons par \mathcal{P} une telle parabole, si un point M appartient à \mathcal{P} , alors il est centre d'un cercle passant par le foyer F et tangent à la directrice \mathcal{D} . Réciproquement pour tracer un cercle passant par F et tangent à \mathcal{D} en un quelconque de ses points H , il suffit de tracer la médiatrice de $[HF]$, l'intersection de cette droite avec la perpendiculaire à \mathcal{D} en H est un point M équidistant

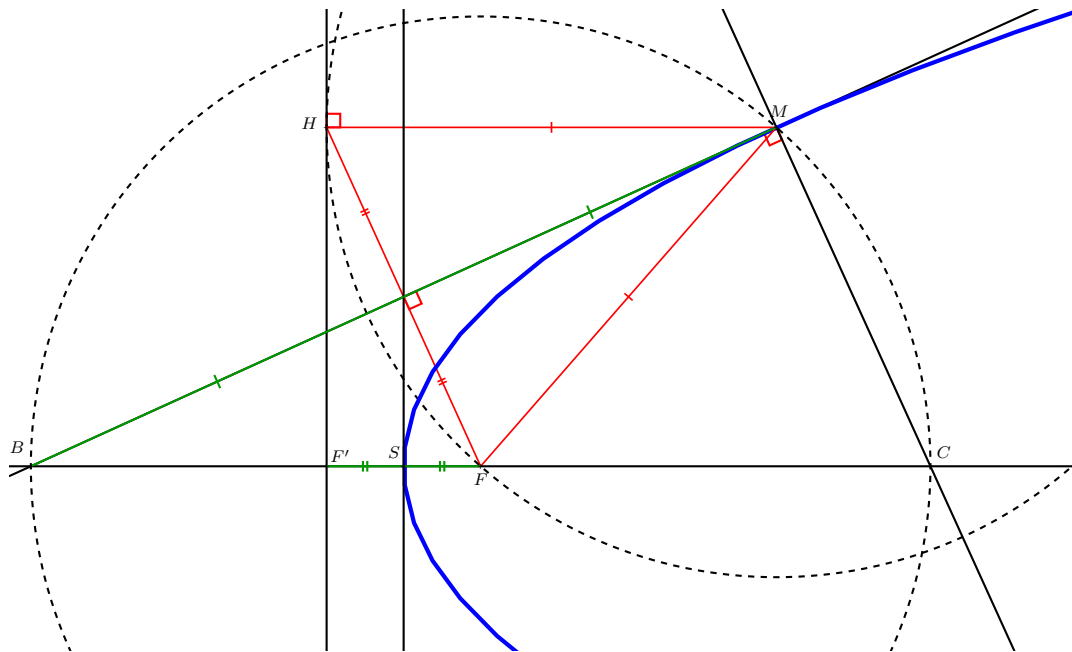


FIGURE IV.2 – Parabole construite à partir du foyer F et de la directrice $\mathcal{D} = (F'H)$.

de X et F , qui appartient par conséquent à \mathcal{P} . On peut donc définir une parabole, comme lieu des centres des cercles passant par un point fixe et tangents à une droite donnée.

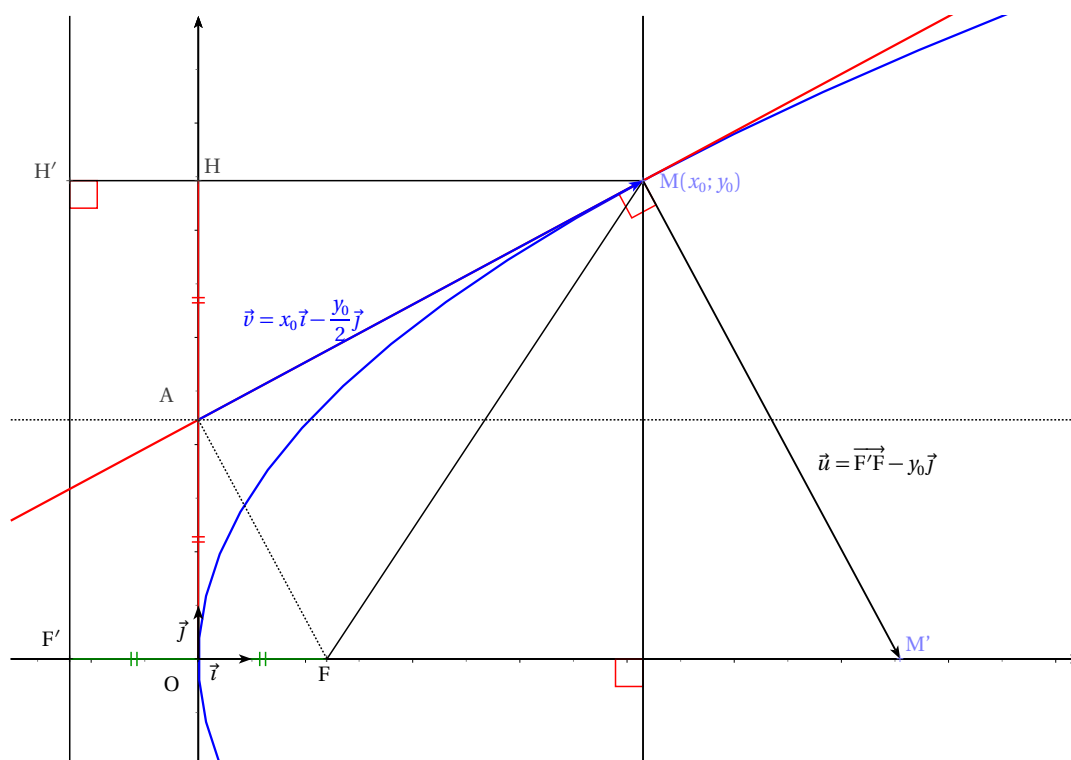
Sur la figure IV.2 il apparaît que si F' est le projeté orthogonal du Foyer F sur la directrice, alors le milieu S de $[FF']$ est un point de la parabole. Si on trace la droite d parallèle à la directrice passant par S , celle-ci est médiatrice de $[FF']$, tous les points de la parabole sont donc nécessairement dans le demi-plan de frontière d contenant F , car tous les points du demi-plan complémentaire sont strictement plus éloignés de F que de F' et par conséquent de la directrice, pour cette raison S est appelé le sommet de la parabole. La droite (FF') est axe de symétrie de la parabole, car si $M \in \mathcal{P}$, il est immédiat de vérifier que son symétrique M' par rapport à (FF') vérifie $M'F = MF = FH = FH'$, où H' est à la fois symétrique de H par rapport à (FF') et projeté orthogonal de M' sur la directrice.

La tangente à la parabole en S est d et la tangente en M est la médiatrice de $[FH]$, cela est moins évident géométriquement que pour les ellipses et hyperboles, nous allons le justifier par calcul différentiel au paragraphe IV-2.

IV-2 Équations d'une parabole de ses tangentes et normales

2-1 Choix du repère

Étant donné une parabole \mathcal{P} de foyer F et directrice d , choisissons le repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ comme sur la figure IV.3, tel que l'origine O soit le milieu du foyer F et de son projeté orthogonal F' sur la directrice d , posons $p = F'F$ et $\vec{i} = \frac{1}{p}\overrightarrow{F'F}$. Soit un point $M(x; y)$ dans ce repère et H son projeté orthogonal sur d , on a $MH = \left|x + \frac{p}{2}\right|$ et $MF^2 = \left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2$. Le point

FIGURE IV.3 – Parabole d'équation cartésienne $y = 2px^2$.

M appartient donc à \mathcal{P} si et seulement si :

$$MF = MH \Leftrightarrow \left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2 = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 \Leftrightarrow y^2 = 2px$$

Nous pouvons donc définir une parabole par une équation cartésienne, de la même manière que pour ellipse ou une hyperbole.

DÉFINITION 12 Dans un plan euclidien Π , une parabole est une courbe plane pour laquelle il existe un réel p , et un repère orthonormé du plan dans lequel elle se situe, pour lequel elle admet une équation cartésienne du type : $y^2 = 2px$.

Comme pour l'hyperbole, il est important de remarquer qu'elle admet des branches infinies, pour nous permettre par la suite d'énoncer des critères permettant de distinguer les trois types de coniques que nous venons d'étudier. Dans le cas de la parabole il y en a deux car la coordonnée x est nécessairement positive, et on a $\lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{y^2}{2p} = \lim_{y \rightarrow -\infty} \frac{y^2}{2p} = +\infty$.

2-2 Équations cartésiennes des tangentes et normales

Pour obtenir une équation cartésienne dans le repère du paragraphe précédent, des droites normales et tangentes à la parabole \mathcal{P} d'équation $y^2 = 2px$, considérons que celle-ci est la courbe de niveau 0 de la fonction $f : \mathcal{A}_2 \rightarrow \mathbb{R}$ dont le gradient est

$$M(x; y) \mapsto 2px - y^2$$

$$\text{grad } f : \mathcal{A}_2 \longrightarrow \overrightarrow{\mathcal{A}_2} .$$

$$M(x; y) \longmapsto 2p\vec{i} - 2y\vec{j}$$

Le vecteur $p\vec{i} - y_0\vec{j} = \overrightarrow{F'F} - y_0\vec{j}$ dirige donc la normale à \mathcal{P} en $M_0(x_0; y_0)$, la tangente à \mathcal{P} en $M_0(x_0; y_0)$ admet donc une équation de la forme $px - y_0y = c$ qui doit être vérifiée par le couple $(x_0; y_0)$, or $px_0 - y_0^2 = -px_0$, cette tangente admet donc pour équation : $p(x + x_0) - yy_0 = 0$. Un vecteur orthogonal au gradient de f en M_0 est $y_0\vec{j} + p\vec{i}$ colinéaire à $2x_0\vec{j} + y_0\vec{i}$, la normale en $M_0(x_0; y_0)$ admet donc l'équation $2x_0x + y_0y = 2x_0^2 + y_0^2$. La figure IV.3 illustre comment construire simplement ces droites l'une normale, l'autre tangente en un point $M_0(x_0; y_0)$ de la parabole.

2-3 Équation en coordonnées polaires

Sur la figure IV.4, étant donné la parabole \mathcal{P} admettant F pour foyer et d pour directrice, nous avons représenté le repère orthonormé dont l'origine est F , et dont le premier vecteur unité \vec{i} a une direction orthogonale à d et a même sens que $\overrightarrow{F'F}$ où F' est le projeté orthogonal de F sur d . Soit M le point de coordonnées polaires $[r; \theta] \in]0; +\infty[\times \mathbb{R}$ dans le repère $(F; \vec{i}, \vec{j})$, et H son projeté orthogonal sur la directrice d , on a $MH = |x_M - x_H| = |r \cos \theta + p|$ où p désigne la distance entre le foyer et la directrice. Pour avoir $M \in \mathcal{P}$, il faut et il suffit que $MH = MF \Leftrightarrow r \cos \theta + p = \pm r$, si nous considérons des coordonnées polaires avec $r > 0$, puisque $1 + \cos \theta \geq 0$, il est impossible d'avoir $(r \cos \theta + p) = -r \Leftrightarrow r = \frac{-p}{1 + \cos \theta}$. Le point M de coordonnées polaires $[r; \theta] \in]0; +\infty[\times \mathbb{R}$ appartient donc à la parabole \mathcal{P} si et seulement si $(r \cos \theta + p) = r$. Pour tout $\theta \in]0; 2\pi[$, il existe un unique point de coordonnées polaires $[r; \theta]$ qui vérifie l'équation $r = \frac{p}{1 - \cos \theta}$, si on opte pour un repère orthonormé (F, \vec{u}, \vec{v}) tel que $\vec{u} = -\vec{i}$ soit dirigé du foyer vers la directrice, l'équation polaire de la parabole devient $r = \frac{p}{1 + \cos \theta}$. Il est remarquable que pour les trois types de coniques on retrouve la même équation $r = \frac{p}{1 + e \cos \theta}$, où e est l'excentricité de la conique qui prend la valeur 1 dans le cas particulier de la parabole. Dans le dernier chapitre, nous exploiterons cette façon de définir ainsi indifféremment les trois types de coniques que nous venons d'étudier, pour résoudre le problème de la trajectoire d'une masse ponctuelle en champ de gravitation newtonienne.

Nous avons donc la même représentation paramétrique dans le repère orthonormé (F, \vec{u}, \vec{v}) pour la parabole, que celle déjà envisagée pour l'ellipse et l'hyperbole

$$\left\{ \begin{array}{l} x(\theta) = \frac{p \cos \theta}{1 + \cos \theta} \\ y(\theta) = \frac{p \sin \theta}{1 + \cos \theta} \end{array} \right. ,$$

ainsi que la même équation cartésienne dans le repère (F, \vec{u}, \vec{v}) pour la tangente en $M(x(\theta); y(\theta)) : (1 + \cos \theta)x + \sin \theta y = p$. La première partie du théorème suivant peut donc être démontrée de la même manière qu'au paragraphe II-5-4.

THÉORÈME 12 *Étant donné une corde $[MM']$ d'une parabole \mathcal{P} de foyer F et directrice d , si $F \in [MM']$, alors les tangentes à cette conique en M et M' se coupent sur la directrice de \mathcal{P} , en un point I dont le projeté orthogonal sur la corde $[MM']$ est le foyer F .*

L'ensemble des points P pour lesquels les deux droites tangentes à la parabole issues de ce point sont perpendiculaires est la directrice d .

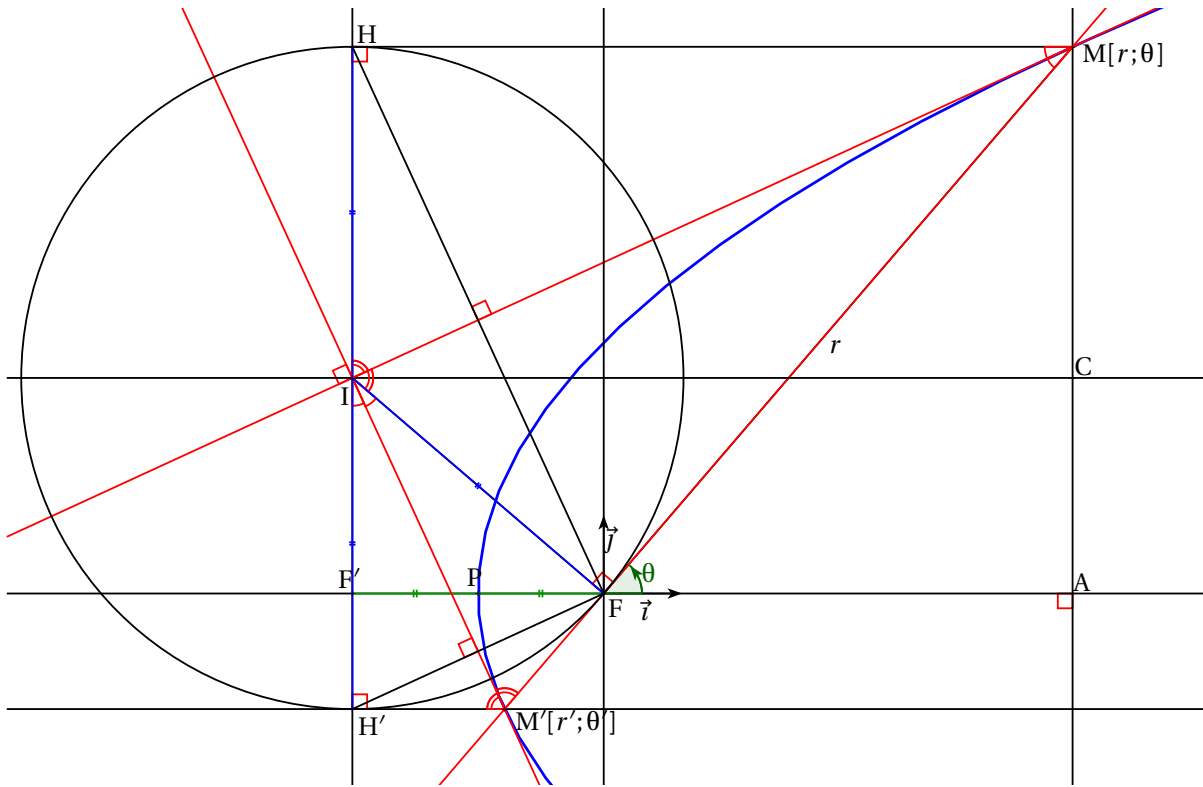


FIGURE IV.4 – Tangentes à une parabole issues d'un point sur la directrice

Nous pouvons justifier que I admet le foyer pour projeté orthogonal sur la corde $[MM']$ à l'aide du premier théorème de Poncelet applicable aussi aux paraboles, comme nous le montrerons en 3-2, ce théorème permet d'affirmer que les segments $[IM']$ et $[IM]$ sont vus du foyer F sous des angles égaux. Ces tangentes sont de plus perpendiculaires entre elles dans le cas particulier d'une parabole, car ce sont les médiatrices des deux segments $[FH]$ et $[FH']$ portés par des droites perpendiculaires, étant donné que le cercle circonscrit à FHH' a pour centre I et diamètre $[HH']$. En traçant le cercle de centre $I \in d$ passant par le foyer F , la figure IV.4 illustre un moyen de tracer les deux tangentes à la parabole, perpendiculaires en I .

On montre la deuxième partie du théorème, en montrant que la droite d est le lieu exhaustif des points d'où la parabole est vue sous un angle droit, car si dans le repère (F, \vec{u}, \vec{v}) on a deux tangentes à la parabole en des points d'angles polaires θ et θ' , alors elles admettent pour équations $(1 + \cos \theta)x + (\sin \theta)y = p$ et $(1 + \cos \theta')x + (\sin \theta')y = p$ (voir paragraphe II-5-3 avec $e = 1$). Leurs vecteurs directeurs $\vec{u} = -\sin \theta \vec{i} + (1 + \cos \theta) \vec{j}$ et $\vec{v} = -\sin \theta' \vec{i} + (1 + \cos \theta') \vec{j}$ sont orthogonaux si et seulement si le produit scalaire suivant est nul,

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \sin \theta \cdot \sin \theta' + (1 + \cos \theta)(1 + \cos \theta') = 1 + \cos \theta + \cos \theta' + \cos(\theta - \theta')$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \cos \theta + \cos \theta' + 2 \cos^2 \frac{\theta - \theta'}{2}$$

En appliquant l'identité $\cos p + \cos q = 2 \cos \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}$, on obtient les égalités suivantes :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 2 \cos \frac{\theta - \theta'}{2} \cos \frac{\theta + \theta'}{2} + 2 \cos^2 \frac{\theta - \theta'}{2}$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 2 \cos \frac{\theta - \theta'}{2} \left(\cos \frac{\theta + \theta'}{2} + \cos \frac{\theta - \theta'}{2} \right)$$

En appliquant une deuxième fois cette identité on obtient :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 4 \cos \frac{\theta - \theta'}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta'}{2}$$

Or, ce produit est nul si et seulement si l'une des congruences modulo 2π suivantes est vérifiée : $\theta - \theta' \equiv \pi$, $\theta \equiv \pi$ ou $\theta' \equiv \pi$. Mais les points de la parabole n'existent que pour les angles polaires de mesure non équivalentes à π , il est donc nécessaire d'avoir $\theta - \theta' \equiv \pi$ pour obtenir des tangentes perpendiculaires ; cela montre qu'il est nécessaire que les points de contacts d'angles polaires θ et θ' soient alignés avec l'origine du repère : F . Le lieu orthoptique orthoptique de notre parabole est donc la droite d qui a servi de directrice pour la définir en association avec le foyer F , ceci met en évidence l'unicité de la directrice d'une parabole qui est donc son lieu orthoptique. Le foyer aussi est nécessairement unique, car il apparaît en tenant compte de l'équation $\rho = \frac{p}{1 + \cos \theta}$, que la distance minimum entre la directrice et un point de la parabole est $\frac{p}{2}$, obtenue lorsque $\theta = 0$. Cet unique point de la parabole le plus proche de la directrice est son sommet P , si F' est le projeté orthogonal de P sur la directrice, le foyer F ne peut être que le symétrique de F' par rapport à P .

2-4 Construction d'un cône dont la parabole est une section plane

Dans ce chapitre, nous venons de voir trois définitions d'une parabole, la première par un couple foyer, directrice, la deuxième par une équation cartésienne, et la troisième par une équation en coordonnées polaires. Pour montrer qu'elles sont équivalentes à la définition par section conique, entrevue à la fin du chapitre d'introduction, nous procéderons comme pour l'ellipse et l'hyperbole. Étant donné une parabole \mathcal{P} située dans un plan Π , définie à partir de sa directrice d et de son foyer F situés dans Π , il nous faut pouvoir construire un cône tel que \mathcal{P} soit l'intersection de ce cône avec Π . Cette parabole \mathcal{P} en rouge sur la figure IV.5 est l'ensemble des points M du plan Π tels que $MF = MH$, où H est le projeté orthogonal de M sur la droite d . On désignera par F' le projeté orthogonal de F sur d , et par P le milieu de $[FF']$. Puisque le foyer est unique, on voit qu'il est nécessaire de pouvoir inscrire dans le cône recherché, une sphère tangente en F à Π . Le centre C d'une telle sphère \mathcal{S} doit être sur la perpendiculaire à Π en F , la génératrice g du cône recherché qui passe par $P \in \mathcal{P}$, doit de plus être symétrique de (PF) par rapport à (CP) . La droite g' symétrique de g par rapport à l'axe du cône est aussi une génératrice, qui doit être parallèle à (PF) pour rétablir la situation de la figure IV.5, g' doit donc être tangente à \mathcal{S} en un point de la sphère diamétralement opposé à F . Une fois C fixé, on ne peut donc construire qu'une seule génératrice g' ayant ces propriétés, on obtient un sommet S possible pour le cône recherché à l'intersection de g' et g . D'après le paragraphe 1-1, nous savons que la section de ce cône par le plan Π est un ensemble \mathcal{C} de points, qui ont la propriété d'être équidistants de F et d'une droite d' perpendiculaire à (PF) en $\mathcal{S}_P(F)$. On est assuré que $d = d'$, car P est un point de Π qui est bien sur le cône que nous venons de construire, et que dans Π , il n'existe qu'une seule perpendiculaire à (PF) passant par $\mathcal{S}_P(F)$, on a donc $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}$. Comme pour les ellipses et hyperboles, c'est en V-4-1, lors de la démonstration du théorème de Dandelin qui concerne tous les types de coniques, que nous montrerons que cette inclusion est en fait une égalité. On étudiera de plus à cette occasion, le lieu des sommets S lorsque C parcourt la perpendiculaire à Π en F .

unitaires : $\frac{\overrightarrow{FM_0}}{FM_0} - \vec{i}$, il apparaît ainsi que la normale à la parabole dirigée par ce gradient est bissectrice de $(\overrightarrow{FM_0} ; \overrightarrow{MH})$, c'est à dire la bissectrice extérieure de l'angle géométrique $\widehat{FM_0H}$. La tangente à la parabole en M_0 est donc la bissectrice intérieure de $\widehat{FM_0H}$, et aussi la médiatrice de $[FH]$ comme nous l'avons envisagé à la fin du paragraphe précédent, cette propriété fournit un moyen de construction à la règle et au compas des tangentes à une parabole. On en déduit que le projeté orthogonal du foyer sur une tangente en $M \in \mathcal{P}$ est le milieu de $[FH]$, où H est le projeté orthogonal de M sur la directrice, on a donc la même propriété que pour les autres coniques où les cercles directeur ont été remplacés par une droite directrice. L'ensemble des projetés du foyer sur les tangentes à la parabole, est l'image par l'homothétie de centre F et rapport $\frac{1}{2}$ de la droite directrice, celle-ci est la tangente à la parabole en son sommet S . Nous réutiliserons cette propriété commune aux ellipses, hyperboles et paraboles, lorsque nous rechercherons en V-6 toutes les possibilités de construire une conique tangente aux trois côtés d'un triangle.

La tangente et la normale coupent l'axe de symétrie en des points B et C tels que $BHMF$ soit un losange et $HMCF$ un parallélogramme, F est donc milieu de $[BC]$. On en déduit que le foyer d'une parabole est milieu de tout segment, dont les extrémités sont les intersections de son axe de symétrie avec la normale et la tangente en un quelconque de ses points.

3-2 Trois théorèmes de Poncelet

Étant donné la parabole \mathcal{P} et un point $P \notin \mathcal{P}$, pour construire d'éventuelles tangentes à la parabole passant par P , on vient de voir que les points de contacts M sont tels que si H est le projeté orthogonal de M sur la directrice d , alors P est sur la médiatrice de $[HF]$. Il faut donc pouvoir obtenir des points de la directrice sur le cercle de centre P passant par F , pour que P soit équidistant de H et F , si P' est le projeté orthogonal de P sur la directrice, il existe deux tels points H_1 et H_2 si et seulement si $PP' < PF$. On peut donc construire deux tangentes à la parabole passant par un point P , si et seulement si P est situé dans la partie du plan admettant la parabole pour frontière qui contient la directrice, leurs constructions est illustrée par la figure IV.6, où l'on a tracé le cercle de centre P passant par F , pour obtenir un ou deux points $H \in d$ tel que P soit équidistant de F et H . Le premier théorème de Poncelet est encore vérifié pour les paraboles, car les angles marqués en vert sur cette figure ont même mesure :

- $\widehat{PH_1M_1} = \widehat{M_1FP}$ car ils sont symétriques par rapport à la médiatrice de $[FH_1]$,
- $\widehat{PH_2M_2} = \widehat{M_2FP}$ car ils sont symétriques par rapport à la médiatrice de $[FH_2]$,
- $\widehat{PH_2M_2} = \widehat{H_2PP'}$: angles alternes-internes,
- $\widehat{PH_1M_1} = \widehat{H_1PP'}$: angles alternes-internes,
- $\widehat{H_2PP'} = \widehat{H_1PP'}$ car ils sont symétriques par rapport à la médiatrice de $[H_1H_2]$ et on a $P'H_1 = P'H_2$.

On en déduit $\widehat{M_1FP} = \widehat{M_2FP}$ et le premier théorème de Poncelet.

THÉORÈME 13 (1^{ER} THÉORÈME DE PONCELET) *Étant donné une parabole de foyers F et directrice d , pour tout point P tel que son projeté orthogonal P' sur d vérifie $PP' < PF$, il existe deux droites d_1 et d_2 passant par P tangentes à la parabole en des points M_1 et M_2 , tels que les 2 segments $[PM_1]$ et $[PM_2]$ sont vus du foyer sous des angles égaux.*

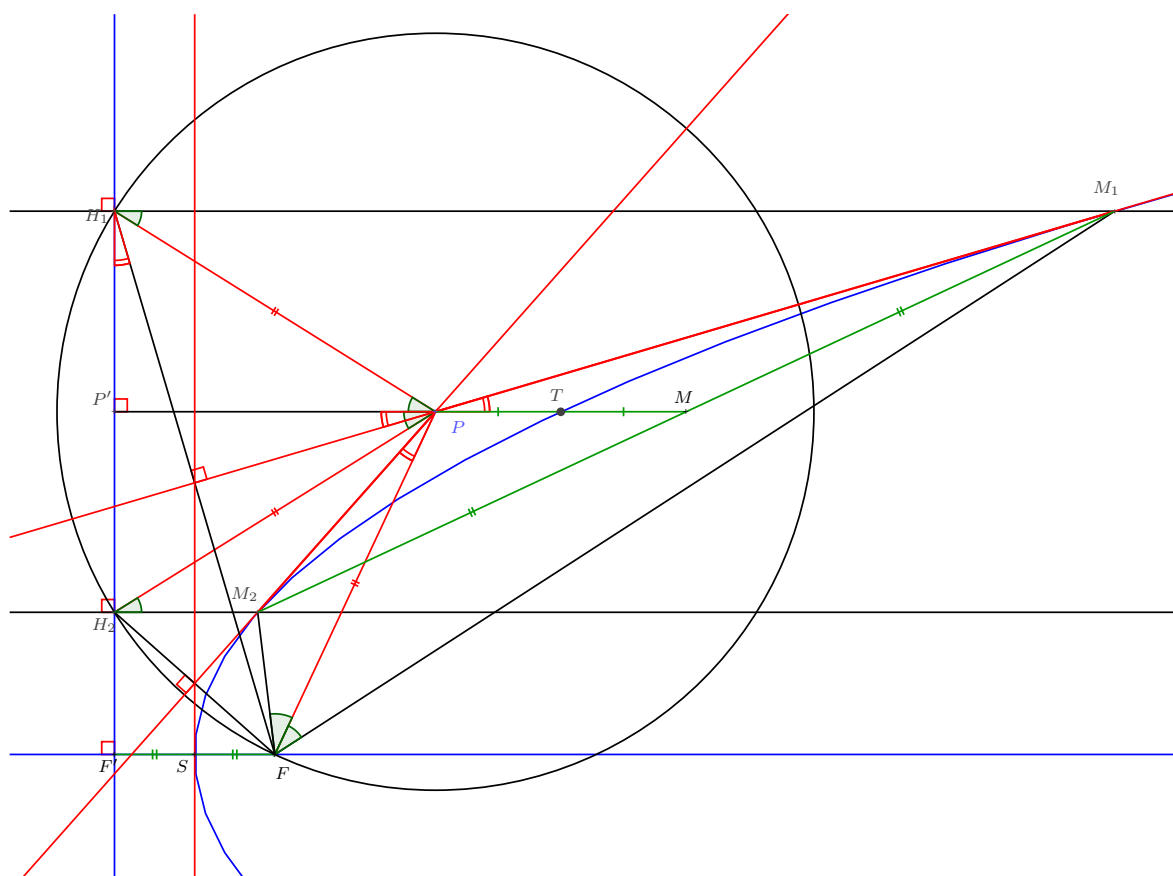


FIGURE IV.6 – Illustration des théorèmes de Poncelet pour une parabole.

Pour les paraboles qui n'ont qu'un seul foyer et pas de centre de symétrie, les 2^e et 3^e théorèmes de Poncelet prennent les formes suivantes :

THÉORÈME 14 (2^E THÉORÈME DE PONCELET) *Étant donné une parabole de foyers F et directrice d , si un point P est tel que son projeté orthogonal P' sur d vérifie $PP' < PF$, alors il existe deux droites passant par P tangentes à la parabole, ces tangentes sont de plus isogonales¹ par rapport aux droites (PF) et (PP') .*

THÉORÈME 15 (3^E THÉORÈME DE PONCELET) *Étant donné une parabole de foyers F et directrice d , si deux droites issues d'un même point P sont tangentes à cette parabole en des points M_1 et M_2 , alors la perpendiculaire à la directrice d passant par P , passe par le milieu M de $[M_1M_2]$, elle coupe de plus la parabole en un point T qui est milieu de $[PM]$.*

La preuve de la première partie de ce 3^e théorème est immédiate, car P' est le milieu de la corde $[H_1H_2]$ du cercle de centre P passant par F , son projeté perpendiculairement à la directrice sur (M_1M_2) est donc le milieu M de $[M_1M_2]$, car les droites (M_1H_1) , (PP') et (M_2H_2) sont perpendiculaires toutes les trois à la directrice. Les équations cartésiennes des tangentes en $M_1(x_1; y_1)$ et $M_2(x_2; y_2)$ sont vérifiées par les coordonnées $(x_p; y_p)$ de P , on a donc $p(x_1 + x_p) = y_1y_p$ et $p(x_2 + x_p) = y_2y_p$, par addition membres à membres, on en déduit

1. Voir annexe A-2 pour plus de précisions sur les notions d'isogonalité.

les équations : $y_P^2 = 2px_P$ et $y_Q^2 = 2px_Q$, on obtient : $\frac{y_P - y_Q}{x_P - x_Q} = \frac{2p}{y_P + y_Q}$, or $\frac{y_P - y_Q}{x_P - x_Q} = \tan \theta$ est

le coefficient directeur de (PQ) dirigée par \vec{u} et $\frac{y_P + y_Q}{2}$ est l'ordonnée commune de M, I et T , cette ordonnée est donc $\frac{p}{\tan \theta}$ et ne dépend donc que de la direction de \vec{u} , on peut donc énoncer le théorème suivant :

THÉORÈME 16 *Les milieux de toutes les cordes d'une parabole ayant une direction donnée, est une demi-droite parallèle à son axe, dont l'origine est son point de contact avec sa tangente de même direction que les cordes.*

Que la droite passant par T et dirigée par \vec{u} soit tangente à la parabole, peut être admis et compris géométriquement comme étant le fait qu'une sécante dirigée par \vec{u} , dont le milieu M tend vers le point T atteint cette position limite. Plus rigoureusement, en revenant à l'équation cartésienne $p(x_T + x) = y_T \cdot y$ de la tangente à la parabole en T , il apparaît que son coefficient directeur est $\frac{p}{y_T} = \tan \theta$,

3-4 Recherche d'une parabole tangente aux côtés d'un triangle

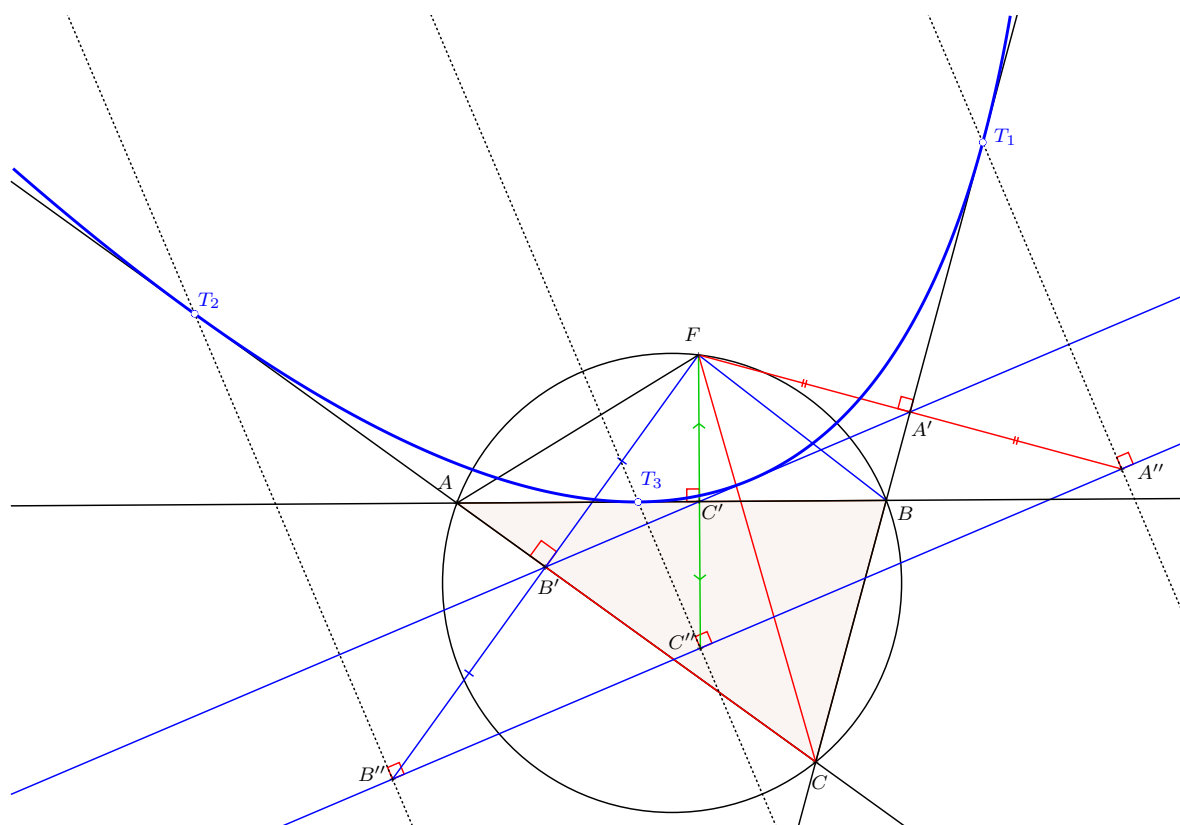


FIGURE IV.8 – Construction d'une parabole tangente aux 3 côtés du triangle ABC , avec foyer F sur le cercle circonscrit à ABC .

Étant donné une parabole et une direction fixée par un vecteur \vec{u} dans un même plan, pour obtenir une droite dirigée par \vec{u} tangente à la parabole, nous avons vu au paragraphe 3-1

qu'elle doit être médiatrice d'un segment $[XF]$, où F est le foyer de la parabole et X un point de la directrice d de cette parabole. Si la droite d' passant par F orthogonalement à \vec{u} n'est pas parallèle à d , un seul point X à l'intersection de d et d' peut vérifier $\vec{u} \perp (FA)$. Le projeté orthogonal de F sur la tangente de même direction que \vec{u} est le milieu de $[XF]$, il doit donc toujours se situer sur la droite image de d par l'homothétie de centre F et rapport $\frac{1}{2}$. Si on fixe un point F susceptible d'être foyer de la parabole recherchée, il en résulte deux conditions nécessaires pour qu'existe au moins une parabole de foyer F tangente à 3 droites distinctes :

- les trois droites doivent être de directions différentes, car étant donné une direction, il ne peut exister qu'une seule tangente à la parabole ayant cette direction.
- les projetés orthogonaux de F sur les trois droites doivent être alignés,

ces conditions sont suffisantes pour pouvoir construire la parabole recherchée.

Comme illustré par la figure IV.8 il nous a suffi de prendre pour directrice, l'image par l'homothétie \mathcal{H} de centre F et rapport 2 de la droite qui passe par les trois projetés orthogonaux A' , B' et C' sur les droites (BC) , (CA) et (AB) . Le procédé de construction d'une parabole envisagé au paragraphe 1-2 suffit à justifier que les trois droites (AB) , (BC) et (CA) sont tangentes à la parabole ainsi construite, car si $A'' = \mathcal{H}(A')$, $B'' = \mathcal{H}(B')$ et $C'' = \mathcal{H}(C')$, elles se retrouvent être médiatrices des segments $[FA'']$, $[FB'']$ et $[FC'']$. Ces conditions nous amènent à invoquer le théorème de Simson démontré en annexe A-4 page 153, qui affirme que les projetés orthogonaux d'un point F sur les trois droites supportant les côtés d'un triangle ABC non aplati sont alignés, si et seulement si ce point est sur le cercle circonscrit au triangle. La directrice de la parabole de foyer F tangente aux trois côtés du triangle que l'on pourra alors tracer, est appelée droite de Steiner du point F relativement au triangle ABC . En annexe à la suite du théorème de Simson, on a fourni la preuve que la droite de Steiner de tout point sur le cercle circonscrit à un triangle, passe par l'orthocentre de celui-ci. Ces propriétés nous seront indispensables au paragraphe V-6-1, pour élucider quel type de conique tangentes à trois droites données il est possible de tracer, nous apporterons ainsi une réponse complète aux questions posées en II-6-4 et III-4-2.

Chapitre V

Coniques en général et étude de quelques coniques célèbres

V-1 Courbes algébriques planes du second degré

1-1 Courbes définies en coordonnées cartésiennes par l'équation

$$ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey + e = 0$$

Jusqu'à maintenant nous avons défini avec précisions ce qu'était une ellipse, une hyperbole ou une parabole, mais sommes restés flous sur la définition d'une conique en général. Pour plus de précisions, commençons par cette première définition. Dans notre environnement modélisé par un espace euclidien \mathcal{E}_3 de dimension 3, appelons conique, un sous-ensemble \mathcal{C} de \mathcal{E}_3 ayant les propriétés suivantes :

- il existe un plan \mathcal{P} contenu dans \mathcal{E}_3 (sous-variété affine de dimension 2) tel que $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}$,
- Il existe un repère cartésien de \mathcal{P} , et un polynôme du second degré $P(X, Y) \in \mathbb{R}[X, Y]$ à deux indéterminées et coefficients réels, tel que \mathcal{C} soit l'ensemble de tous les points dont les coordonnées $(x; y)$ dans ce repère, sont les solutions dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ de l'équation $P(x, y) = 0$.

Étant donné un espace affine sur \mathbb{R} de dimension 2 muni du repère (O, \vec{u}, \vec{v}) cartésien quelconque, on appelle de manière générale courbe algébrique, tout ensemble des points dont les coordonnées $(x; y)$ dans un certain repère, sont l'ensemble des solutions dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ d'une équation du type $P(x, y) = 0$, où P est un polynôme de $\mathbb{R}[X, Y]$. On parlera donc de coniques à propos de courbes algébriques, lorsque le polynôme qui les définit est de degré inférieur ou égal à 2. De manière générale une conique est donc un ensemble de points qui dans un plan, admet une équation de la forme :

$$ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey + f = 0$$

où a, b, c, d, e et f sont des coefficients réels quelconques. Si une courbe \mathcal{C} admet une telle équation dans un repère orthonormé (O, \vec{u}, \vec{v}) , dans tout autre repère (O', \vec{i}, \vec{j}) tel que $\overrightarrow{OO'} = x_{O'}\vec{u} + y_{O'}\vec{v}$; $\vec{i} = a\vec{u} + b\vec{v}$ et $\vec{j} = c\vec{u} + d\vec{v}$, \mathcal{C} admet toujours une équation polynomiale de degré inférieur ou égal à 2. En effet si un point M a des coordonnées $(x'; y')$ dans le repère (O', \vec{i}, \vec{j}) , on a $\overrightarrow{O'M} = x'\vec{i} + y'\vec{j}$ qui permet d'exprimer \overrightarrow{OM} sous cette forme : $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO'} + x'(a\vec{u} + b\vec{v}) + y'(c\vec{u} + d\vec{v})$. Les coordonnées de M dans le repère (O, \vec{u}, \vec{v}) sont donc $(x; y)$ telles que
$$\begin{cases} x = x_{O'} + \alpha x' + \gamma y' \\ y = y_{O'} + \beta x' + \delta y' \end{cases}$$
. Le

point M appartient donc à la courbe \mathcal{C} , si et seulement si $P(x_{O'} + \alpha x' + \gamma y', y_{O'} + \beta x' + \gamma y') = 0$, en développant le premier membre de cette équation, il apparaît encore une équation polynomiale en x' et y' , de degré inférieur ou égal à 2. On montre alors qu'il est toujours possible d'effectuer un changement de repère, dans lequel il est possible d'obtenir une équation sans terme en $x'y'$, il est même possible d'exiger que le repère soit orthonormé. Soit en effet un repère orthonormé quelconque (O, \vec{u}, \vec{v}) , pour lequel on puisse affirmer qu'un point M de coordonnées $(x; y)$ dans ce premier repère appartient à la conique \mathcal{C} , si et seulement si $P(x, y) = 0$ où P est le polynôme suivant à coefficients réels, en les deux indéterminées X et Y : $aX^2 + bY^2 + cXY + dX + eY + f$. Effectuons une rotation d'angle θ de (O, \vec{u}, \vec{v}) , afin d'obtenir un autre repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ tel que :

$$\begin{cases} \vec{i} = \cos \theta \vec{u} + \sin \theta \vec{v} \\ \vec{j} = -\sin \theta \vec{u} + \cos \theta \vec{v} \end{cases}$$

les coordonnées de M dans ce deuxième repère deviennent :

$$(x' \cdot \cos \theta - y' \cdot \sin \theta; x' \cdot \sin \theta + y' \cdot \cos \theta)$$

Afin d'exprimer une équation en (x', y') de notre conique dans le nouveau repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$, on développe $P(x' \cdot \cos \theta - y' \cdot \sin \theta; x' \cdot \sin \theta + y' \cdot \cos \theta)$, notre première équation en (x, y) devient $Q(x', y') = 0$, où $Q \in \mathbb{R}[X, Y]$ est toujours un polynôme de degré 2, avec pour coefficient de XY :

$$-2a \cos \theta \sin \theta + 2b \sin \theta \cos \theta + c \cos^2 \theta - c \sin^2 \theta = (b - a) \sin 2\theta + c \cos 2\theta$$

Lorsque $c \neq 0$, il est possible de déterminer un réel α tel que $\tan \alpha = \frac{b-a}{c}$ et $\cos \alpha \neq 0$, en choisissant θ tel que $2\theta - \alpha = \frac{\pi}{2}$, le coefficient du terme en $x'y'$ devient nul, car :

$$(b - a) \sin 2\theta + c \cos 2\theta = \frac{c}{\cos \alpha} (\sin \alpha \sin 2\theta + \cos \alpha \cos 2\theta) = \frac{c}{\cos \alpha} \cos(2\theta - \alpha) = 0$$

Notre courbe \mathcal{C} , qui a la propriété d'être une courbe algébrique de degré inférieur ou égal à 2 (dans repère cartésien quelconque à priori), admet donc dans un repère orthonormé bien choisi une équation de la forme $ax^2 + by^2 + dx + ey + f = 0$. Cela justifie que dans le paragraphe suivant, nous puissions obtenir sans restriction de généralités, tous les types de coniques en n'étudiant que ce type d'équations en repère orthonormé.

1-2 Courbes d'équation cartésienne $ax^2 + by^2 + cx + dy + e = 0$ en repère orthonormé.

Soit \mathcal{C} l'ensemble de points de coordonnées $(x; y)$ dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ qui vérifient l'équation $ax^2 + by^2 + cx + dy + e = 0$. Par translation de l'origine du repère, nous allons montrer que cette équation peut se ramener à une forme qui permet selon certaines conditions, de reconnaître une courbe que nous avons étudiés dans dans l'un des chapitres précédents, mais il va falloir ajouter à ces trois types de coniques que nous venons d'étudier : ellipses, hyperboles et paraboles, une famille de coniques dites dégénérées que nous allons rencontrer dans l'étude suivante.

1^{er} cas : $a = b = 0$

Ce cas est bien connu, si $c \neq 0$ ou $d \neq 0$, on obtient une équation de degré 1 qui est celle d'une droite. Si $c = d = 0$ la situation ne présente aucun intérêt.

2^e cas : $a = 0, b \neq 0$

- Si $c = 0$, notre équation devient $by^2 + dy + e = 0$, cette équation de degré 2 en la seule inconnue y aboutit à l'ensemble vide ou bien à une ou deux droites dirigées par \vec{i} , car elles admettent des équations de la forme $y = k$.

- si $c \neq 0$, on peut écrire l'équation sous la forme $\left(y + \frac{d}{2b}\right)^2 + \frac{c}{b}\left(x + \frac{e}{c} - \frac{d^2}{4bc}\right) = 0$.

Soit O' le point tel que $\overrightarrow{OO'} = \left(\frac{d^2}{4bc} - \frac{e}{c}\right)\vec{i} - \frac{d}{2b}\vec{j}$, si M a pour coordonnées $(x; y)$ dans le repère d'origine O , ses coordonnées dans le repère d'origine O' sont $(X; Y) = \left(x + \frac{e}{c} - \frac{d^2}{4bc}; y + \frac{d}{2b}\right)$. Après cette translation du repère, on obtient pour équation de \mathcal{C} : $y^2 + \frac{c}{b}x = 0$.

On reconnaît là, l'équation d'une parabole dont l'axe de symétrie est dirigé par \vec{j} .

3^e cas : $a \neq 0, b = 0$

On obtient le même type de courbes que dans le 2^e cas étudié précédemment, en effectuant un changement de repère qui échange les vecteurs \vec{i} et \vec{j} , on obtient donc cette fois ci, des droites ou des axes de paraboles dirigés par \vec{j} .

4^{er} cas : $ab \neq 0$, nous pouvons réduire l'équation de la manière suivante :

$$ax^2 + by^2 + cx + dy + e = a\left(x + \frac{c}{2a}\right)^2 + b\left(y + \frac{d}{2b}\right)^2 + \left(e - \frac{c^2}{4a^2} - \frac{d^2}{4b^2}\right) = 0$$

Soit alors le point O' tel que $\overrightarrow{OO'} = -\frac{c}{2a}\vec{i} - \frac{d}{2b}\vec{j}$, si M a pour coordonnées $(x; y)$ dans le repère d'origine O ses coordonnées dans le repère d'origine O' deviennent $\left(x + \frac{c}{2a}; y + \frac{d}{2b}\right)$, après cette translation du repère, on obtient pour équation de \mathcal{C}

$$ax^2 + by^2 = f \quad \text{en posant} \quad f = \frac{c^2}{4a^2} + \frac{d^2}{4b^2} - e$$

- **Si $f = 0$ et $ab > 0$** , nous sommes dans le cas d'une conique dégénérée réduite au point O' , car dans ce cas là, pour tout couple de coordonnées $(x; y) \neq (0; 0)$, on a $ax^2 + by^2 \in]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$
- **Si $f = 0$ et $ab < 0$** , notre équation peut se réduire au système :

$$\begin{cases} \sqrt{|a|x} + \sqrt{|b|y} = 0 \\ \text{ou} \\ \sqrt{|a|x} - \sqrt{|b|y} = 0 \end{cases}$$

Nous sommes dans le cas de dégénérescence en deux droites sécantes en O' .

- **Si $f \neq 0$** , notre équation peut se réduire de la manière suivante : $\frac{x^2}{\frac{f}{a}} + \frac{y^2}{\frac{f}{b}} = 1$.

- Si $\frac{f}{a} < 0$ et $\frac{f}{b} < 0$, \mathcal{C} est vide.
- Si $\frac{f}{a} > 0$ et $\frac{f}{b} > 0$, on peut poser $\alpha^2 = \frac{f}{a}$ et $\beta^2 = \frac{f}{b}$, et notre équation peut alors s'écrire sous la forme $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$. On reconnaît là l'équation d'une ellipse de centre O' et grand axe dirigé par \vec{i} si $\alpha > \beta$, ou bien d'une ellipse de centre O' et grand axe dirigé par \vec{j} si $\beta > \alpha$, ou bien d'un cercle de centre O' si $\alpha = \beta$ (voir II-3).
- Si $\frac{f}{a}$ et $\frac{f}{b}$ sont de signes contraires, posons $\alpha^2 = \left| \frac{f}{a} \right|$ et $\beta^2 = \left| \frac{f}{b} \right|$ notre équation peut se transformer de la manière suivante : $\left| \frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} \right| = 1$. On reconnaît l'équation d'une hyperbole d'axe focal dirigé par \vec{i} si $\frac{f}{a} > 0$, ou bien d'une hyperbole d'axe focal dirigé par \vec{j} si $\frac{f}{a} < 0$ (voir III-3).

Appelons courbe plane algébrique du second degré, même si parfois il peut d'agir de droites, tout sous-ensemble de points d'un plan, dont les coordonnées dans un repère de ce plan, sont toutes les solutions d'une équation $P(x, y) = 0$, où P est un polynôme du second degré en x et y . En considérant à part le cas sans intérêt de l'ensemble vide, lorsque $P(x, y) = 0$ n'a pas de solutions dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, nous venons de montrer que toute courbe plane algébrique du second degré, prend toujours l'un des aspects suivants :

1. dans les cas que nous appellerons celui des coniques propres ou non dégénérées :
 - (a) une ellipse (cercle inclus),
 - (b) une hyperbole à deux branches,
 - (c) une parabole ;
2. dans les cas de coniques dites dégénérées :
 - (a) la réunion de deux droites parallèles,
 - (b) la réunion de deux droites sécantes,
 - (c) une unique droite,
 - (d) un point.

Nous avons vu dans les chapitres précédents, que toute intersection d'un plan avec un cône ou un cylindre, était incluse dans un ensemble de points de l'un des types que nous venons d'énumérer. Par la suite, nous avons pour but de montrer que réciproquement, toute conique que nous avons définie pour le moment comme courbe plane algébrique du second degré, peut être obtenue par intersection d'un plan avec cône ou un cylindre, nous aurons besoin accessoirement du théorème démontré dans le paragraphe suivant.

1-3 Conique passant par 5 points

Étant donné un ensemble \mathcal{A} constitué de cinq points quelconques et distincts d'un plan affine, est-il possible de construire une conique passant pas ces cinq points ? Les deux cas suivants présentent peu d'intérêt :

- Si les cinq points sont alignés sur une droite d , toute réunion de d avec une autre droite, où bien la droite d seule constituent des coniques dégénérées contenant \mathcal{A} .
- Si quatre points seulement sont sur une droite d , on peut envisager comme solution, toute conique dégénérée constituée de la réunion de d et d'une droite quelconque, passant par le cinquième point non situé sur d .

Dans ces deux cas il y a trivialement existence d'une solution au problème posé mais pas unicité, posons alors comme l'hypothèse supplémentaire, qu'il n'existe aucune droite passant par quatre points de \mathcal{A} . Si trois points de \mathcal{A} sont sur une droite d , tout autre point de \mathcal{A} ne peut donc pas être sur d , il est donc possible de désigner par O, I et J trois points non alignés et par A et B le quatrième et le cinquième point tels que $\mathcal{A} = \{O, I, J, A, B\}$. Chercher à construire une conique \mathcal{C} passant par \mathcal{A} , revient alors à déterminer un polynôme $P \in \mathbb{R}[X, Y]$ de degré 2, tel que \mathcal{C} soit l'ensemble des points de coordonnées $(x; y)$ dans un repère $(O, \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$ qui vérifient l'équation $P(x, y) = 0$. Si $[P(X, Y) = aX^2 + bY^2 + cXY + dX + eY + f]$ définit une conique \mathcal{C} qui passe par O, I et J , les coefficients de P doivent obéir aux contraintes suivantes :

$$\bullet O \in \mathcal{C} \implies f = 0 \qquad \bullet I \in \mathcal{C} \implies d = -a \qquad \bullet J \in \mathcal{C} \implies e = -b$$

On doit donc chercher à obtenir un polynôme \mathcal{P} tel que :

$$P(X, Y) = aX^2 + bY^2 + cXY - aX - bY$$

S'il existe une droite d passant par trois points de \mathcal{A} , il est toujours possible de choisir les trois premiers points du repère (O, I, J) de manière que $d = (OI)$ et $A \in d$. Soit alors $(x_A; 0)$ les coordonnées de A , les coefficients du polynôme P doivent obéir à la contrainte supplémentaire $ax_A(x_A - 1) = 0$. On en déduit $a = 0$, car A étant distinct de O et I , on a $x_A \neq 1, x_A \neq 0$. Lorsque $A \in (OI)$, le polynôme P prend donc la forme : $P(X, Y) = (cX + bY - b)Y$. La conique recherchée est alors dégénérée, c'est la réunion des deux droites $d = (OI)$ et $d' = (JB)$, dans le repère $(O, \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$ ces deux droites ont pour équations respectives $y = 0$ et $cx + by - b = 0$, elles peuvent être sécantes si $c \neq 0$, ou bien parallèles si $c = 0$.

Dans l'hypothèse où aucune droite passerait par trois points de \mathcal{A} , désignons par $(x_A; y_A)$ et $(x_B; y_B)$ les coordonnées de A et B dans le repère $(O, \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$. Pour avoir $\{A, B\} \subset \mathcal{C}$, il nous faut alors déterminer un polynôme P tel que $P(X, Y) = aX(X - 1) + bY(Y - 1) + cXY$, dont les coefficients doivent obéir aux contraintes supplémentaires suivantes

$$\begin{cases} (x_A^2 - x_A)a + (y_A^2 - y_A)b + x_A y_A c = 0 \\ (x_B^2 - x_B)a + (y_B^2 - y_B)b + x_B y_B c = 0 \end{cases}$$

On peut vérifier que lorsqu'aucune droite ne passe par trois points de \mathcal{A} , ce système en les 3 inconnues a, b et c est toujours de rang 2. car le déterminant suivant ne peut pas être nul :

$$\begin{vmatrix} (x_A^2 - x_A) & x_A y_A \\ (x_B^2 - x_B) & x_B y_B \end{vmatrix} = x_A x_B \begin{vmatrix} (x_A - 1) & y_A \\ (x_B - 1) & y_B \end{vmatrix} = x_A x_B \det(\overrightarrow{IA}, \overrightarrow{IB})$$


En effet si l'une des composantes x_A, x_B était nulle, alors l'un des points A ou B serait sur l'axe (OI) , et si $\det(\overrightarrow{IA}, \overrightarrow{IB})$ était nul alors I serait sur la droite (AB) ; on aurait pu faire les mêmes

constatations concernant le déterminant $\begin{vmatrix} (y_A^2 - y_A) & x_{AYA} \\ (y_B^2 - y_B) & x_{BYB} \end{vmatrix}$. On en déduit que notre système

admet des solutions qui sont les coordonnées d'un vecteur qui dirige une droite vectorielle, intersection de deux plans vectoriels distincts dans \mathbb{R}^3 . Si $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$ est l'une de ces solutions, toutes les autres seront de la forme (ka, kb, kc) , toutes les équations de la forme $kax(x-1) + kby(y-1) + kcxxy = 0$ avec $k \neq 0$, définissent alors une unique conique passant par A, B, O, I et J .

On a non seulement prouvé l'existence et l'unicité d'une conique passant par cinq points, tels qu'aucune droite ne passe par quatre d'entre eux, mais nous avons aussi prouvé que si une conique possède trois points alignés sur une droite d , cette conique est nécessairement dégénérée en la droite d seule, ou bien la réunion $d \cup d'$, où d' désigne une autre droite qui peut être sécante ou parallèle à d . Cela prouve aussi qu'une droite qui passe par deux points d'une conique non dégénérée, ne la rencontre en aucun autre point. On sait en effet pouvoir tracer plus de trois tangentes de directions différentes à toute ellipse, hyperbole ou parabole, on est donc assuré que ces coniques propres ne peuvent pas être constituées d'une ou deux droites, d'où l'énoncé du théorème suivant :

THÉORÈME 17 *Étant donné cinq points dans un plan affine tels qu'aucune droite ne passe par quatre d'entre eux, il existe une unique conique passant par ces points. La conique est dégénérée si et seulement si trois points parmi les cinq sont alignés.*

Insistons sur le fait entrevu dès le début, que si quatre points parmi les cinq sont alignés, l'existence est toujours assurée, mais il n'y a pas unicité et il ne peut s'agir que d'une conique dégénérée puisque qu'elle contient au moins trois points alignés. Je suppose qu'on tient là l'explication du logo  de GEOGEBRA, qui montre une ellipse passant par cinq points.

1-4 Selon son équation cartésienne, quel type de conique obtient-on ?

Soit le polynôme $P(X, Y) = aX^2 + bXY + cY^2 + dX + eY + f \in \mathbb{R}[X, Y]$ avec $|a| + |c| > 0$. Dans l'espace affine de dimension 2 muni du repère (O, \vec{u}, \vec{v}) cartésien quelconque, tous les points M de coordonnées $(x; y)$ qui vérifient l'équation $P(x, y) = 0$ peuvent être déterminés en fixant $y \in \mathbb{R}$ ou $x \in \mathbb{R}$, puis en résolvant l'une des deux équations du second degré suivantes, l'une en l'inconnue x , l'autre en l'inconnue y :

$$ax^2 + (by + d)x + (cy^2 + ey + f) = 0 \quad ; \quad cy^2 + (bx + e)y + (ax^2 + dx + f) = 0$$

À partir de l'une ou l'autre de ces équations, on peut commencer par chercher à déterminer des points distincts en choisissant x et y de manière la plus judicieuse et simple possible. On saura que \mathcal{C} est dégénérée, si et seulement si se présente l'une de ces quatre éventualités :

- l'une des deux équations peut n'exister que virtuellement si l'une des deux indéterminées X ou Y ne figure pas dans le polynôme P , c'est le cas si $a = b = d = 0$ ou bien si $b = c = e = 0$, l'autre équation pourra n'avoir aucune solution ou bien une à deux solutions, \mathcal{C} sera alors vide ou bien dégénérée en une droite ou une paire de droites parallèles.
- \mathcal{C} peut aussi être vide lorsque l'on ne peut obtenir de solution réelle, en tentant de résoudre l'une de ces deux équations. Cette situation peut intervenir par exemple, lorsque dans la première équation, le discriminant $\Delta(y)$ calculé ci-dessous est strictement négatif pour tout y :

$$\Delta(y) = (by + d)^2 - 4a(cy^2 + ey + f) = (b^2 - 4ac)y^2 + (2bd - 4ae)y + (d^2 - 4af).$$

C'est le cas si le coefficient $b^2 - 4ac$ est strictement négatif, et si dans la résolution de l'équation $\Delta(y) = 0$ qui est encore une équation du second degré en l'inconnue y , le calcul de cet autre discriminant δ ci-dessous, aboutit à un résultat strictement négatif :

$$\delta = (bd - 2ae)^2 - (b^2 - 4ac)(d^2 - 4af)$$

- Si $b^2 - 4ac < 0$ et $\delta = 0$, \mathcal{C} sera réduite à un seul point, car les équations $\Delta(y) = 0$ et $P(x, y) = 0$ admettent pour unique solution $y_0 = \frac{2ae - bd}{b^2 - 4ac}$ et $\left(-\frac{by_0 + d}{2a}; y_0\right)$.
- Dans toutes les autres situations, il sera possible de déterminer au moins cinq points distincts appartenant à \mathcal{C} , si cette conique est dégénérée, il y aura assurément au moins trois points alignés parmi les cinq.

Remarquons que lorsque P est le **polynôme homogène** non nul $P(X, Y) = aX^2 + bXY + cY^2$, il est évident que \mathcal{C} est dégénérée car si elle contient un point $M \neq O$, on a $(OM) \subset \mathcal{C}$. En posant $\Delta = b^2 - 4ac$, on peut distinguer les trois cas de **coniques dégénérées** suivants :

- **1^{er} cas** : $\Delta < 0$: \mathcal{C} est réduite au point $O(0; 0)$.
- **2^e cas** : $\Delta = 0$: si $b \neq 0$ alors \mathcal{C} est la seule droite d'équation $y = -\frac{2a}{b}x$.
Si $b = \Delta = 0$, on a $P \neq 0 \Rightarrow P(x, y) = ax^2$ et $a \neq 0$, \mathcal{C} est alors la droite d'équation $x = 0$,
- **3^e cas** : $\Delta > 0$: si $c \neq 0$, \mathcal{C} est la paire de droites sécantes en O d'équations $y = \frac{-c \pm \sqrt{\Delta}}{2c}x$.
Si $c = 0$, on a l'équation $x(ax + by) = 0$, \mathcal{C} est encore une paire de droites sécantes en O car $c = 0$ et $\Delta > 0 \Rightarrow b \neq 0$.

Par contre, si après avoir calculer les coordonnées de cinq de ses points, on a pu vérifier qu'aucune droite ne passe par trois d'entre eux, on est assuré que \mathcal{C} est non dégénérée, il est encore possible de déterminer la nature de \mathcal{C} à l'aide de $\Delta = b^2 - 4ac$:

- **1^{er} cas** : $\Delta < 0$:
le discriminant $\Delta(y)$ de la première équation en x prend nécessairement des valeurs positives pour que \mathcal{C} soit non vide, ce ne peut être le cas que si $(bd - 2ae)^2 - (b^2 - 4ac)(d^2 - 4af) > 0$. Le discriminant $\Delta(y)$ est alors positif, seulement si y appartient à un intervalle borné du type $[y_1; y_2]$, où y_1 et y_2 sont les solutions de l'équation en y : $(b^2 - 4ac)y^2 + (2bd - 4ae)y + (d^2 - 4af) = 0$. Les coordonnées obtenues sont donc bornées, \mathcal{C} n'a donc pas de branches infinies, la conique non dégénérée \mathcal{C} est nécessairement une **ellipse**.
- **2^e cas** : $\Delta = 0$:
si $2bd - 4ae = 0$, on a nécessairement $\Delta(y) = d^2 - 4af$ et pour que \mathcal{C} soit non vide, on doit avoir $d^2 - 4af > 0$ et $x = \frac{-by - d \pm \sqrt{d^2 - 4af}}{2a}$. Mais cette éventualité doit être exclue, car dans ces conditions \mathcal{C} serait dégénérée.
On a donc nécessairement $2bd - 4ae \neq 0$, soit $y_0 = \frac{4af - d^2}{2bd - 4ae}$, $\Delta(y)$ prend des valeurs positives pour y appartenant à un intervalle du type $[y_0; +\infty[$ ou bien $]-\infty; y_0]$, borné supérieurement ou inférieurement par y_0 . Dans ces conditions \mathcal{C} ne peut admettre que deux branches infinies obtenues lorsque y tend vers $-\infty$, ou bien lorsque y tend vers $+\infty$, et de plus il ne peut pas y avoir de centre de symétrie, la conique non dégénérée \mathcal{C} est donc une **parabole**.
- **3^e cas** : $\Delta > 0$:
si l'équation $\Delta(y) = 0$ n'a pas de solutions, on a $\Delta(y) > 0$ pour tout y , sinon si y_1 et y_2

sont les solutions de $\Delta(y) = 0$, on a $\Delta(y) \geq 0$ pour $y \in]-\infty; y_0] \cup [y_1; -\infty[$. Dans tous les cas \mathcal{C} admet quatre branches infinies, deux lorsque y tend vers $-\infty$ et deux autres lorsque y tend vers $+\infty$, notre conique non dégénérée est donc une **hyperbole**.

V-2 Équation en coordonnées polaires

C'est le système de coordonnées qui nous sera le plus utile et pratique pour résoudre les équations différentielles de la mécanique Newtonienne, dans les trois chapitres qui précèdent en II-5-3, III-5-3 et 2-3, nous avons obtenus les équations en coordonnées polaires de chaque type de conique non dégénérée. Avec un repère cartésien centré sur un foyer et un premier axe perpendiculaire aux directrices, leurs équations prennent la même forme :

$$\rho = \frac{p}{1 + e \cos \theta} \quad \text{avec } (\rho, \theta) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R} \quad ; \quad p \in \mathbb{R} \quad ; \quad e \in [0; +\infty[$$

Rappelons que le paramètre e a été appelé excentricité et qu'il caractérise le type de la conique, on peut donc discuter de la nature de la conique en observant aussi son équation en coordonnées polaires :

- Si $e = 0$, on obtient un cercle de rayon $|p|$.
- Si $e \in]0; 1[$, on obtient une ellipse, elle n'admet aucun point à l'infini car ρ est défini pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, étant donné que le dénominateur de la fraction qui permet le calcul de ρ , appartient à l'intervalle $[1 - e; 1 + e]$ qui ne contient pas 0.
- Si $e = 1$, on obtient une parabole, elle admet deux branches infinies car ρ tend vers $\pm\infty$ lorsque θ tend vers π par valeur supérieure ou inférieure, pour toute autre valeur de l'angle θ le rayon ρ est un réel fini.
- Si $e \in]1; +\infty[$, on obtient une hyperbole, elle admet quatre branches infinies car ρ tend vers $\pm\infty$ lorsque θ tend vers $\pm A \cos \frac{1}{e}$ par valeurs inférieures ou supérieures, pour toute autre valeur de l'angle θ le rayon ρ est un réel fini.

Si $e = \sqrt{2}$, l'hyperbole est équilatère car alors c'est pour $\theta = \pm \frac{\pi}{4}$ que ρ n'est pas un réel fini, ces mesures d'angles définissent des directions d'asymptotes qui sont donc perpendiculaires.

V-3 Équation en coordonnées barycentriques

3-1 Introduction de points à l'infini

Les coordonnées barycentriques ne sont pas étudiées en lycée, ce paragraphe peut être sauté en première lecture, mais une initiation en annexe B rassemble les notions nécessaires et suffisantes pour aborder le sujet. Les coordonnées barycentriques permettent de «compléter» le plan affine dans lequel nous travaillons habituellement par des points à l'infini, cela offre des commodités pour l'étude des coniques célèbres que nous envisageons d'étudier par la suite.

Nous appellerons plan projectif la réunion d'un plan affine et de tous les points à l'infini, dont les triplets de coordonnées barycentriques ont une somme nulle. Dans un repère cartésien $(O; \vec{i}, \vec{j})$ du plan, un point M classique à distance finie est caractérisé par son unique couple coordonnées cartésiennes $(x; y)$, tel que $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$. Appelons I et J les points tels que $\overrightarrow{OI} = \vec{i}$ et $\overrightarrow{OJ} = \vec{j}$, les coordonnées barycentriques normalisées du point M dans le référentiel

(I, J, O) sont $(x, y, 1 - x - y)$, car l'égalité $x\overrightarrow{MI} + y\overrightarrow{MJ} + (1 - x - y)\overrightarrow{MO} = \vec{0}$ qui permet de le définir comme barycentre de (I, x) , (J, y) et $(O, 1 - x - y)$ est équivalente à $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$. Tous les triplets de coordonnées barycentriques de M dans le référentiel (I, J, O) sont donc de la forme $(kx, ky, k(1 - x - y))$ avec $k \in \mathbb{R}^*$.

Inversement, si un point M admet les coordonnées barycentriques (X, Y, Z) dans le référentiel (I, J, O) , s'il s'agit d'un point classique du plan affine, ses coordonnées cartésiennes dans $(O; \vec{i}, \vec{j})$ sont $\left(\frac{X}{X+Y+Z}; \frac{Y}{X+Y+Z}\right)$, car par définition du barycentre de (I, X) , (J, Y) et (O, Z) on a $(X+Y+Z)\overrightarrow{OM} = X\overrightarrow{OI} + Y\overrightarrow{OJ} + Z\overrightarrow{OO}$. Mais si $X+Y+Z = 0$, quelque soit le point O' , le vecteur $X\overrightarrow{O'I} + Y\overrightarrow{O'J} + Z\overrightarrow{O'O} = X\overrightarrow{OI} + Y\overrightarrow{OJ}$ est indépendant de O' , des coordonnées barycentriques telles que $X+Y+Z = 0$ définissent donc un nouvel objet qui n'est plus un simple point du plan affine, nous le qualifierons de point à l'infini assimilé à la direction du vecteur $X\vec{i} + Y\vec{j}$. Par opposition les points de coordonnées (X, Y, Z) tels que $X+Y+Z \neq 0$ seront qualifiés de points à distance finie.

Une conique du plan affine qui est l'ensemble des points de coordonnées cartésiennes $(x; y)$, dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ quelconque qui vérifient une équation polynomiale du second degré $ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey + f = 0$, admet donc en coordonnées barycentriques dans le référentiel (I, J, O) , l'équation suivante :

$$a\frac{X^2}{(X+Y+Z)^2} + b\frac{Y^2}{(X+Y+Z)^2} + c\frac{XY}{(X+Y+Z)^2} + d\frac{X}{X+Y+Z} + e\frac{Y}{X+Y+Z} + f = 0$$

L'équation écrite ainsi n'a se sens que pour les points classiques à distances finies tels que leurs coordonnées barycentriques vérifient $X+Y+Z \neq 0$, mais elle prend tout son sens pour les points à l'infini, si on l'écrit sous la forme :

$$aX^2 + bY^2 + cXY + (dX + eY)(X+Y+Z) + (X+Y+Z)^2 f = 0$$

Ceci est l'équation en coordonnées barycentriques d'une conique généralisée au plan projectif, qui pourrait contenir aussi des points à l'infini, dont les coordonnées barycentriques vérifieraient le système $\begin{cases} X+Y+Z = 0 \\ aX^2 + bY^2 + cXY = 0 \end{cases}$.

- Pour une ellipse du plan affine, on a montré qu'il existe un repère cartésien $(O; \vec{i}, \vec{j})$ dans lequel elle admet l'équation cartésienne $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$, dans le référentiel (I, J, O) tel que $\overrightarrow{OI} = \vec{i}$ et $\overrightarrow{OJ} = \vec{j}$, des coordonnées barycentriques d'un éventuel point à l'infini de cette conique prolongée au plan projectif devraient vérifier $\begin{cases} X+Y+Z = 0 \\ \frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = 0 \end{cases}$.

Le triplet $(0, 0, 0)$ n'est pas un triplet de coordonnées barycentriques admissible.

une ellipse dans le plan projectif n'admet donc pas de point à l'infini, ce qui est cohérent avec le fait qu'elle soit borné dans le plan affine.

- Par contre, pour une hyperbole pour laquelle on sait qu'il existe un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$, dans lequel elle admet l'équation cartésienne $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$, dans un référentiel (I, J, O) bien choisi, les coordonnées barycentriques d'un point à l'infini de cette conique prolongée au plan projectif doivent vérifier $\begin{cases} X+Y+Z = 0 \\ \frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} = 0 \end{cases}$.

Une hyperbole dans le plan projectif admet donc deux points à l'infini de coordonnées barycentriques $k(a, b, -a - b)$ et $k(a, -b, -a + b)$ dans le référentiel (I, J, O) . Ces points à l'infini sont assimilés aux directions des vecteurs $\vec{a} + \vec{b}$ et $\vec{a} - \vec{b}$, nous avons vu en III-3-3 que ce sont des vecteurs qui dirigent les asymptotes de l'hyperbole d'équation $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ dans le repère (O, \vec{OI}, \vec{OJ}) .

- Pour une parabole d'équation $y^2 - 2px = 0$ dans un repère cartésien $(O; \vec{i}, \vec{j})$, les coordonnées barycentriques dans le référentiel (I, J, O) d'un point à l'infini de cette conique prolongée au plan projectif doivent vérifier
$$\begin{cases} X + Y + Z = 0 \\ Y^2 = 0 \end{cases}.$$

Une parabole dans le plan projectif admet donc un seul point à l'infini de coordonnées barycentriques $k(1, 0, -1)$ dans le référentiel (I, J, O) . Ce point à l'infini est assimilable à la direction du vecteur \vec{i} qui dirige l'axe de la parabole.

En résumé, dans le plan projectif, une conique non dégénérée admet dans tout référentiel une équation en coordonnées barycentriques de la forme $P(X, Y, Z) = 0$ où P est un polynôme homogène de degré 2 en les indéterminées X, Y et Z . Le nombre de points à l'infini détermine sa nature, deux pour une hyperbole, un seul pour une parabole, aucun pour une ellipse.

3-2 Conique circonscrite à un triangle

On peut remarquer que si une conique passe par les trois points du référentiel dans lequel on exprime son équation, celle-ci prend une forme simplifiée, car si $P(X, Y, Z) = aXY + bXZ + cYZ + dX^2 + eY^2 + fZ^2$ est le polynôme homogène de degré 2, telle que notre conique soit l'ensemble des points, dont les coordonnées annulent ce polynôme, alors $P(1, 0, 0) = P(0, 1, 0) = P(0, 0, 1) = 0$ implique $d = e = f = 0$, on peut alors énoncer le lemme suivant très utile.

LEMME 2 *Toute conique circonscrite au triangle ABC , admet une équation en coordonnées barycentriques dans le référentiel (A, B, C) de la forme $aXY + bXZ + cYZ = 0$.*

Étant donné une conique \mathcal{C} qui admet l'équation barycentrique $aXY + bXZ + cYZ = 0$ dans le référentiel (A, B, C) , si l'un des coefficients a, b ou c est nul, \mathcal{C} est dégénérée en la réunion de deux droites, car l'équation $aXY + bXZ + cYZ = 0$ se ramène à l'une des trois équations suivantes : $Y(bZ + cZ) = 0$, ou $X(aY + bZ) = 0$ ou $Z(bX + cY) = 0$. Réciproquement si \mathcal{C} est dégénérée elle contient nécessairement l'une des trois droites (AB) , (BC) ou (CA) , car on montre alors que abc est nécessairement nul. Si tel n'était pas le cas et si \mathcal{C} contenait par exemple la droite (AB) d'équation $Z = 0$, un point $M \in (AB)$ de coordonnées $(X, Y, 0)$ appartiendrait à la conique si et seulement si $XY = 0$. ce qui imposerait $M = B$ ou $M = A$. Cela entre en contradiction avec l'hypothèse que toute la droite (AB) devait être incluse dans \mathcal{C} , un même raisonnement montrerait que si $abc \neq 0$ alors (AC) et (BC) aussi, ne peuvent être incluses dans \mathcal{C} .

On peut alors discuter de la nature d'une telle conique non dégénérée, en recherchant ses points à l'infini qui doivent vérifier en plus l'équation $Z = -X - Y$, on a donc :

$$bX^2 + (b + c - a)XY + cY^2 = 0$$

Pour $Y = 0$, nous devrions avoir $(X, Y, Z) = (0; 0; 0)$ qui n'est pas un triplet de coordonnées barycentriques admissible. Une fois $Y \neq 0$ fixé arbitrairement, le discriminant de cette équation

du second degré en X est $\Delta = (b + c - a)^2 Y^2 - 4bcY^2 = Y^2 (a^2 + b^2 + c^2 - 2ab - 2bc - 2ac)$, il ne peut donc se présenter que les trois éventualités suivantes :

- $a^2 + b^2 + c^2 - 2ab - 2bc - 2ac < 0$

l'équation n'a pas de solution avec $Y \neq 0$, \mathcal{C} n'admet aucun point à l'infini, c'est donc une **ellipse**.

- $a^2 + b^2 + c^2 - 2ab - 2bc - 2ac = 0$

avec $Y \neq 0$ fixé, l'équation n'admet alors qu'une seule solution, qui aboutit au seul et unique point à l'infini de coordonnées barycentriques : $\left(\frac{(a - b - c)Y}{2b}, Y, \frac{(-a - b + c)Y}{2b} \right)$

équivalentes à $(a - b - c, 2b, -a - b + c)$. La conique non dégénérée \mathcal{C} admet un seul et unique point à l'infini, c'est donc une **parabole** dont l'axe est dirigée par $2b\overrightarrow{AB} + (-a - b + c)\overrightarrow{AC} = (a - b - c)\overrightarrow{BA} + (-a - b + c)\overrightarrow{BC} = (a - b - c)\overrightarrow{CA} + 2b\overrightarrow{CB}$.

- $a^2 + b^2 + c^2 - 2ab - 2bc - 2ac > 0$,

avec $Y \neq 0$ fixé, l'équation admet les deux solutions distinctes $X_1 = Y \frac{a - b - c + \sqrt{\Delta}}{2b}$

et $X_2 = Y \frac{a - b - c - \sqrt{\Delta}}{2b}$ qui aboutissent aux deux points à l'infini de coordonnées barycentriques $(X_1, Y, -Y - X_1)$ et $(X_2, Y, -Y - X_2)$. En divisant par $\frac{Y}{2b}$ on obtient les coordonnées équivalentes suivantes : $(a - b - c + \sqrt{\Delta}, 2b, -a - b + c - \sqrt{\Delta})$ et $(a - b - c - \sqrt{\Delta}, 2b, -a - b + c + \sqrt{\Delta})$, la conique non dégénérée \mathcal{C} qui admet ces deux points à l'infini distincts est donc une **hyperbole**.

3-3 Théorème de Pascal

Le Théorème de Pascal permet de répondre à la question concernant la possibilité d'inscrire un hexagone dans une conique, nous avons montré qu'il était toujours possible de faire passer un conique par cinq points distincts, se pose alors la question de trouver une condition simple permettant de savoir si un sixième point appartient à cette conique. Avant d'énoncer ce théorème, convenons de certains points de vocabulaire concernant la notion de côté d'un polygone en général. Lorsqu'on désigne un polygone à n côtés par la suite de ses sommets $M_1 M_2 \dots M_n$, ses côtés sont les $n - 1$ segments $[M_i M_{i+1}]$ où i désigne un entier compris entre 1 et $n - 1$, ainsi que le n^{e} segment $[M_n M_1]$. Dans le cas d'un hexagone avec $n = 6$, on convient de qualifier de paires de côtés opposés les paires $\{[M_1 M_2]; [M_4 M_5]\}$, $\{[M_2 M_3]; [M_5 M_6]\}$ et $\{[M_3 M_4]; [M_6 M_1]\}$.

THÉORÈME 18 (THÉORÈME DE PASCAL) *Soit un hexagone dont chacune des trois paires de côtés opposés, permet de définir un unique point à l'intersection des droites supportant ces côtés, celui-ci peut être éventuellement situé à l'infini si les droites en question sont parallèles; il existe alors une unique conique passant par les six sommets de l'hexagone, si et seulement si ces trois points d'intersection sont alignés (s'ils le sont sur la droite de l'infini, cela signifie que les côtés opposés sont parallèles).*

Cet énoncé signifie que pour tout ensemble \mathcal{A} de 6 points tel que $\mathcal{A} = \{A, B, C, A', B', C'\}$, il existe une conique \mathcal{C} contenant \mathcal{A} si et seulement si les trois points I, J et K tels que $\{I\} = (AC') \cap (A'C)$, $\{J\} = (C'B) \cap (CB')$ et $\{K\} = (BA') \cap (B'A)$ sont alignés. Ce théorème fait très peu d'hypothèses concernant les propriétés de l'hexagone; selon l'ordre dans lequel sont désignés les sommets, on peut faire varier ci dessus la définition des points I, J et K . Il ya $6! = 720$

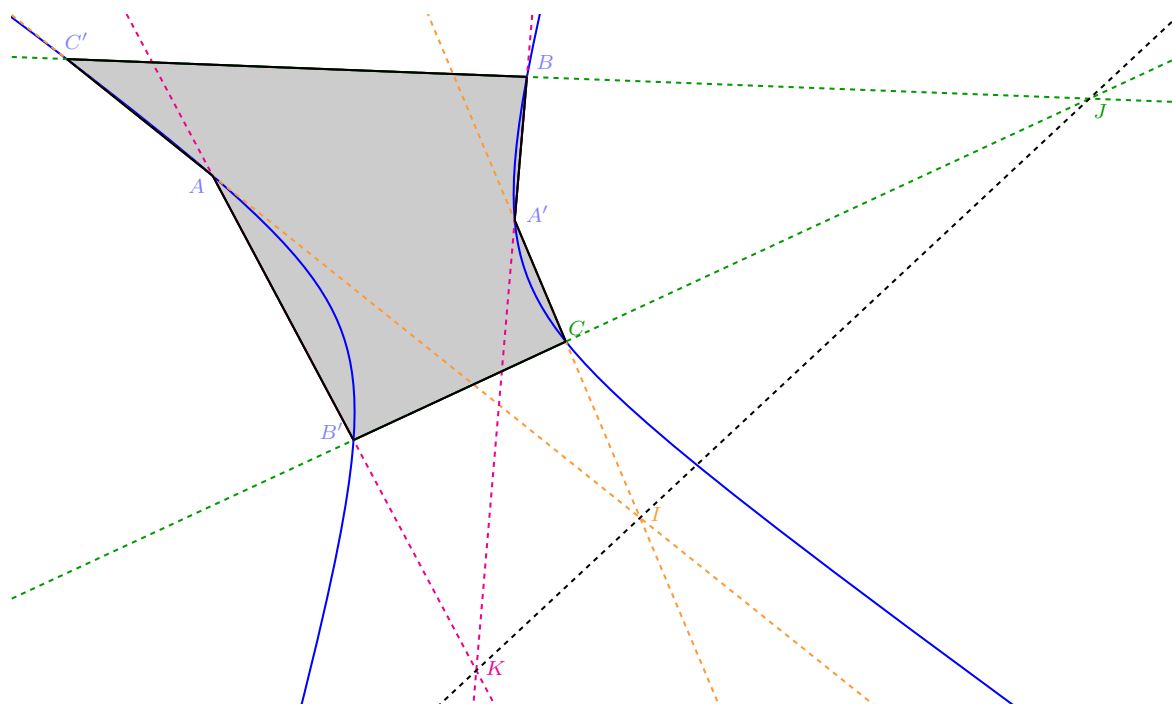


FIGURE V.1 – Première illustration du théorème de Pascal : l'hexagone inscrit dans une hyperbole est tel que les points I , J et K à distance finie sont alignés

manières de désigner un hexagone avec des sommets dans un ensemble \mathcal{A} à 6 éléments, il est indifférent qu'il soit croisé ou pas, convexe ou pas ... Mais si σ désigne une permutation circulaire des 6 entiers de 1 à 6, $M_{\sigma(1)}M_{\sigma(2)}M_{\sigma(3)}M_{\sigma(4)}M_{\sigma(5)}M_{\sigma(6)}$ et $M_{\sigma(6)}M_{\sigma(5)}M_{\sigma(4)}M_{\sigma(3)}M_{\sigma(2)}M_{\sigma(1)}$ désignent des hexagones ayant les mêmes paires de côtés opposés que $M_1M_2M_3M_4M_5M_6$. Il y a donc $\frac{720}{2 \times 6} = 60$ cas de figure, pour désigner les 3 paires de côtés opposés d'un hexagone, dont les sommets constituent l'ensemble \mathcal{A} que l'on s'est donné par avance. En permutant les sommets d'un hexagone inscrit dans une conique, on peut donc déterminer jusqu'à 60 droites de Pascal.

Pour démontrer le théorème, utilisons le référentiel affine (A, B, C) , soient (x_1, y_1, z_1) , (x_2, y_2, z_2) et (x_3, y_3, z_3) les coordonnées barycentriques respectives de A' , B' et C' .

- Les droites (AC') et $(A'B)$ admettent respectivement pour équations :

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x_3 & y_3 & z_3 \\ X & Y & Z \end{vmatrix} = 0 \quad \text{et} \quad \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ X & Y & Z \end{vmatrix} = 0$$

Les coordonnées de leur point d'intersection I vérifient donc le système :

$$\begin{cases} z_3Y - y_3Z = 0 \\ y_1X - x_1Y = 0. \end{cases}$$

Le point I admet donc les coordonnées barycentriques : (x_1y_3, y_1y_3, y_1z_3) .

- Les droites $(C'B)$ et (CB') admettent respectivement pour équations :

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ x_3 & y_3 & z_3 \\ X & Y & Z \end{vmatrix} = 0 \quad \text{et} \quad \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ X & Y & Z \end{vmatrix} = 0$$

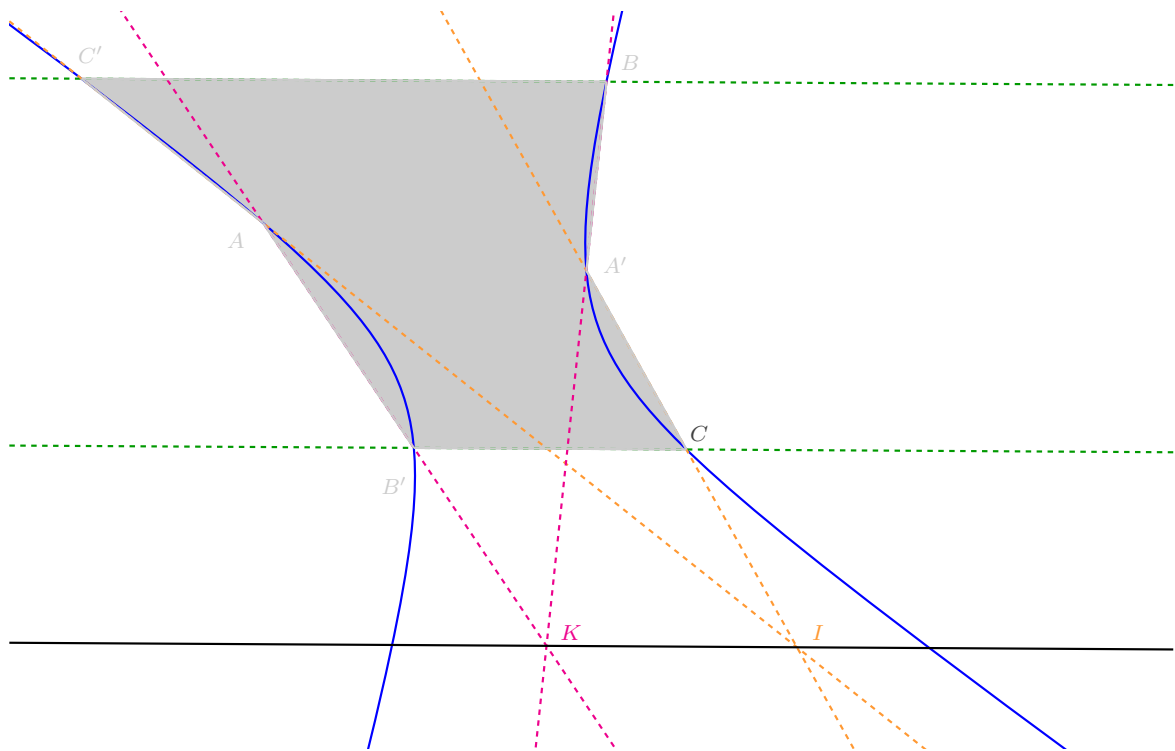


FIGURE V.2 – Deuxième illustration du théorème de Pascal : pour un hexagone ayant deux cotés opposés sur les droites parallèles (BC') et $(B'C)$, le point J est rejeté à l'infini et (IK) est parallèle à ces droites.

Les coordonnées de leur point d'intersection J vérifient donc le système :

$$\begin{cases} z_3X - x_3Z = 0 \\ y_2X - x_2Y = 0 \end{cases}$$

Le point J admet donc les coordonnées barycentriques : (x_2x_3, x_3y_2, x_2z_3) .

- Les droites (BA') et $(B'A)$ admettent respectivement pour équations :

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ X & Y & Z \end{vmatrix} = 0 \quad \text{et} \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ X & Y & Z \end{vmatrix} = 0$$

Les coordonnées de leur point d'intersection K vérifient donc le système :

$$\begin{cases} z_1X - x_1Z = 0 \\ z_2Y - y_2Z = 0 \end{cases}$$

Le point K admet donc les coordonnées barycentriques : (x_1z_2, y_2z_1, z_1z_2) .

Les points I, J et K sont donc alignés si et seulement si $\begin{vmatrix} x_1y_3 & y_1y_3 & y_1z_3 \\ x_2x_3 & x_3y_2 & x_2z_3 \\ x_1z_2 & y_2z_1 & z_1z_2 \end{vmatrix} = 0$, soit :

$$(x_1x_3y_2y_3z_1z_2 + x_2x_3y_1y_2z_1z_3 + x_1x_2y_1y_3z_2z_3) - (x_1x_3y_1y_2z_2z_3 + x_1x_2y_2y_3z_1z_3 + x_2x_3y_1y_3z_1z_2) = 0.$$

Notre conique circonscrite au triangle ABC admet une équation dans le référentiel (A, B, C) de la forme $pYZ + qXZ + rXY = 0$, les points A', B' et C' sont sur cette conique si et seulement si le système suivant en les inconnues (p, q, r) , admet des solutions non triviales différentes de

$$(0, 0, 0) : \begin{cases} y_1 z_1 p + x_1 z_1 q + x_1 y_1 r = 0 \\ y_2 z_2 p + x_2 z_2 q + x_2 y_2 r = 0 \\ y_3 z_3 p + x_3 z_3 q + x_3 y_3 r = 0 \end{cases} . \text{ Ce ne peut être le cas que si son déterminant}$$

est nul, en développant $\begin{vmatrix} y_1 z_1 & x_1 z_1 & x_1 y_1 \\ y_2 z_2 & x_2 z_2 & x_2 y_2 \\ y_3 z_3 & x_3 z_3 & x_3 y_3 \end{vmatrix}$ à l'aide de la règle de Sarrus on obtient la condition :

$$(x_2 x_3 y_1 y_3 z_1 z_2 + x_1 x_3 y_1 y_2 z_2 z_3 + x_1 x_2 y_2 y_3 z_1 z_3) - (x_1 x_2 y_1 y_3 z_2 z_3 + x_2 x_3 y_1 y_2 z_1 z_3 + x_1 x_3 y_2 y_3 z_1 z_2) = 0.$$

Les deux déterminants que nous venons de développer sont exactement opposés, on obtient donc la même condition nécessaire et suffisante, pour qu'une conique passe par les six sommets de l'hexagone $AC'BA'CB'$, ou pour que les points I, J et K soient alignés. Si le système en les inconnues (p, q, r) est de rang 2, toutes les solutions sont proportionnelles et aboutissent à une unique conique. Si le système était de rang 1, la conique ne serait pas unique, cela signifierait qu'elle est nécessairement dégénérée en une ou deux droites, dont l'une contiendrait au moins cinq points sur six (voir démonstration du théorème 17 page 84). Dans ces conditions la conclusion du théorème présente peu d'intérêt, car on sait déjà que ces six points sont sur une conique dégénérée constituée de deux droites : l'une qui contient les points alignés et une deuxième qui passe par les autres points. Il y a toujours unicité de la conique si nos six points sont répartis de manière que seulement quatre d'entre eux sont sur une droite même droite d , car nous pouvons ignorer l'éventuel quatrième point sur d , nous obtenons alors une unique conique passant par les cinq autres points. Dans le cas d'une conique dégénérée en deux droites, nous obtenons le théorème de Pappus comme corollaire du théorème de Pascal, lorsque les points sont répartis en deux sous ensembles de trois points inclus chacun dans deux droites d et d' distinctes.

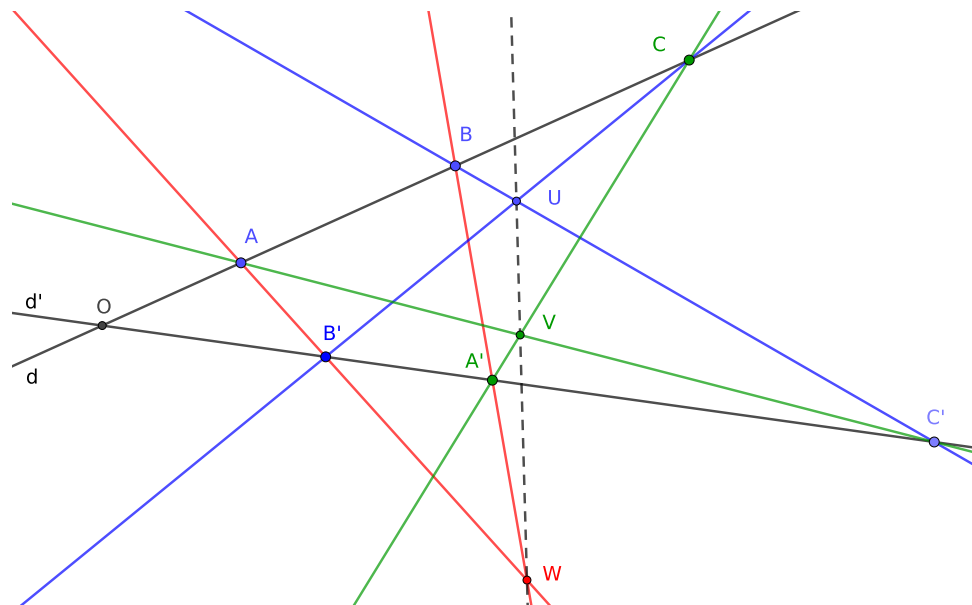


FIGURE V.3 – Illustration du théorème de Pappus

THÉORÈME 19 (THÉORÈME DE PAPPUS) Soient d et d' deux droites distinctes, et six points A, B, C, A', B' et C' tels que nous ayons $\{A, B, C\} \subset d$ et $\{A', B', C'\} \subset d'$, alors les points d'intersection (éventuellement à l'infini) U, V et W tels que :

$$\{U\} = (B'C) \cap (BC') \quad ; \quad \{V\} = (A'C) \cap (AC') \quad ; \quad \{W\} = (A'B) \cap (BA')$$

sont alignés.

Par cinq points tels qu'aucune droite ne passe par trois d'entre eux, nous savons déjà qu'il passe une unique conique, le théorème de Pascal permet de construire point par point cette conique. En effet, étant donné une droite d quelconque passant par l'un de ces points, nous pouvons construire l'unique deuxième point où cette droite rencontre à nouveau la conique. Désignons par A, B, C, D et E les cinq points censés déterminer la conique \mathcal{C} , soit d une droite passant par A , si cette droite recoupe la conique en point F différent de A il est nécessairement unique. En effet, supposons qu'il existe $F \neq A$ tel que $F \in \mathcal{C}$, on peut alors considérer l'hexagone $ABCDEF$, les droites qui portent ses côtés opposés sont :

- (AB) et (DE) , soit I leur point d'intersection,
- (CD) et $d = (FA)$, soit J leur point d'intersection,
- (BC) et (EF) , soit K leur point d'intersection.

D'après le théorème de Pascal, K est nécessairement situé sur la droite (IJ) , il est donc point d'intersection de (BC) et (IJ) , F est donc déterminé de manière unique, puisqu'il doit être situé à l'intersection des droites d et (KE) .

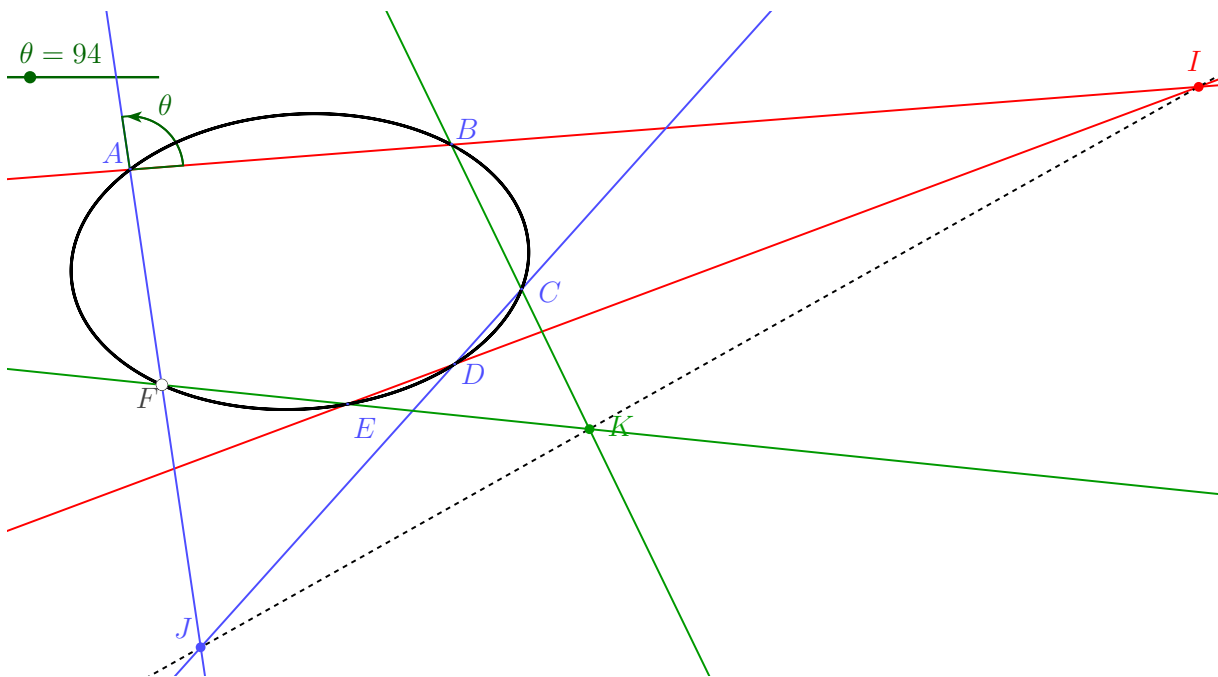


FIGURE V.4 – Construction de la conique passant par 5 points, en faisant varier l'angle θ dans $[0; 2\pi[$.

Dans le cas de figure où l'hexagone aurait deux paires de côtés parallèles, on obtient deux points d'intersection à l'infini, pour que cet hexagone soit inscritible dans une conique, il faut donc que l'intersection de la troisième paire de côtés soit elle aussi à l'infini. Le théorème de Pascal admet le corollaire suivant :

COROLLAIRE 1 *Un hexagone ayant deux paires de côtés opposés sur des droites strictement parallèles est inscriptible dans une conique, si et seulement si la troisième paire de côtés se situe aussi sur des droites parallèles,*

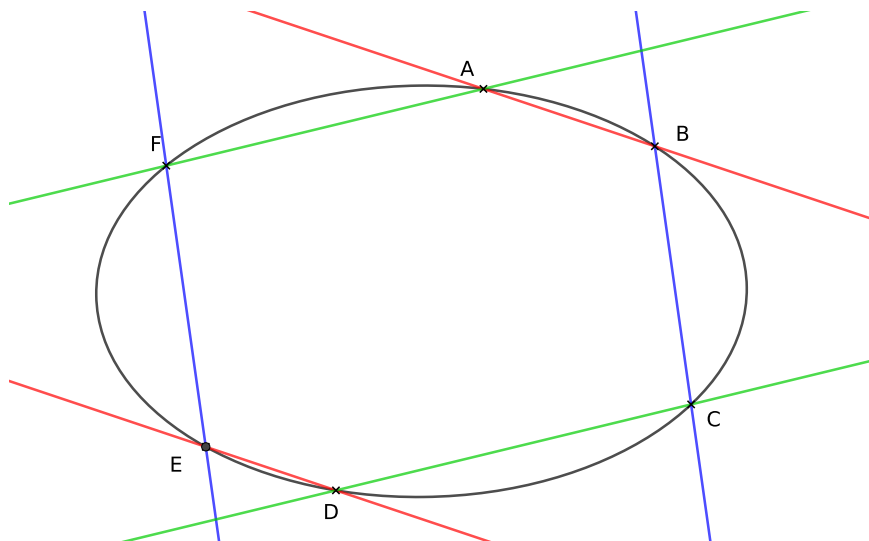


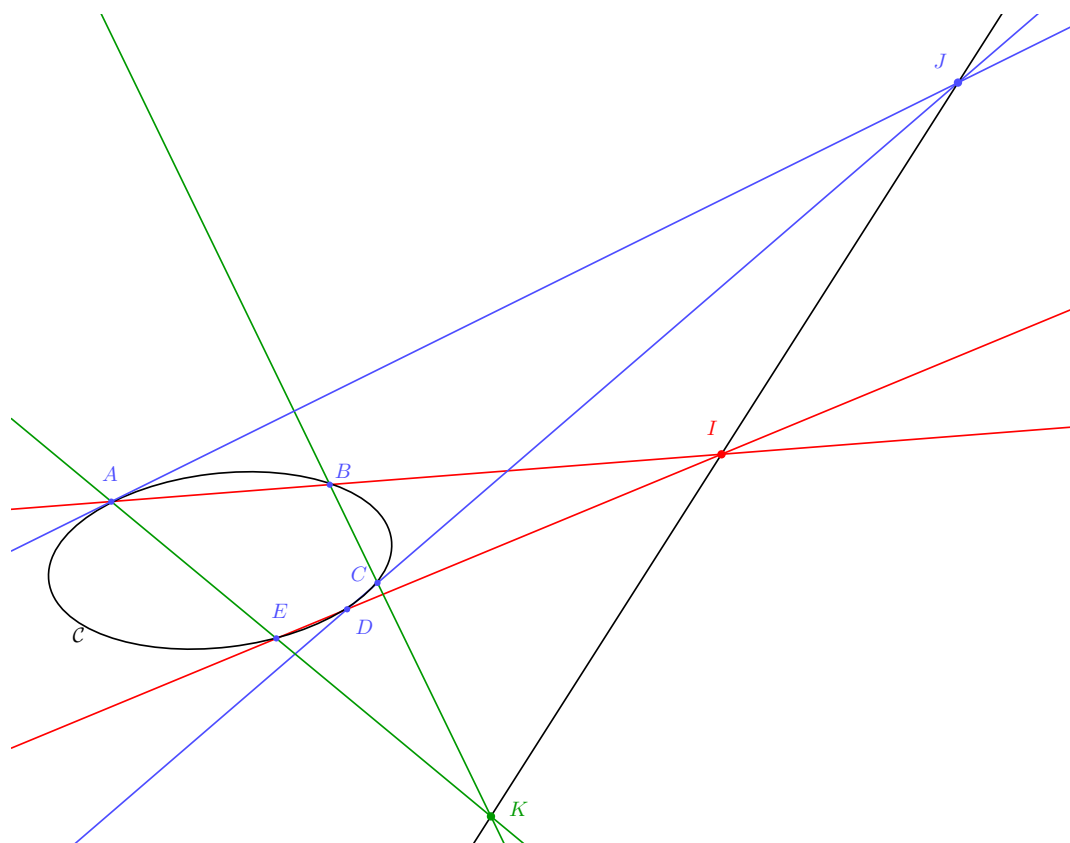
FIGURE V.5 – Un hexagone dont les côtés opposés sont parallèles est inscriptible dans une conique.

Quand une conique \mathcal{C} est déjà tracée, comme illustré en figure V.6, le théorème de Pascal permet aussi d'envisager la construction de la tangente en un point A donné de \mathcal{C} , en utilisant seulement la règle. Il suffit pour cela de choisir 4 autres points B, C, D et E sur \mathcal{C} , en considérant la possibilité d'avoir $F = A$. On construit le point I comme précédemment, mais il faut d'abord construire K à l'intersection de (EA) et (BC) , avant d'obtenir J à l'intersection de (DC) et (KI) . La tangente à \mathcal{C} en A est alors la droite (AJ) .

V-4 Cône passant par tous les points d'une conique

4-1 Théorème de Dandelin

Une conique dégénérée constituée de deux droites parallèles, peut être obtenue comme intersection d'un plan et d'un cylindre. Pour les coniques dégénérées constituées d'un point, ou bien d'une seule droite, ou bien de deux droites sécantes, il est évident qu'on peut les obtenir comme intersection d'un plan et d'un cône; c'est aussi le cas si cette conique est un cercle. Pour les coniques non dégénérées, que nous avons défini pour le moment comme courbes algébriques planes du second degré, nous savons pouvoir leur associer au moins un foyer, nous avons expliqué en II-2-2, III-2-2 et IV-2-4, la démarche qui à partir de ce foyer, permet de construire un cône qui passe par les points de cette conique. Pour une conique incluse dans le plan \mathcal{P} , nous avons seulement pu constater que tous les points à l'intersection du cône et de \mathcal{P} étaient nécessairement sur notre courbe plane du second degré, mais il nous reste à vérifier que

FIGURE V.6 – Construction à la règle seule de la tangente à une conique \mathcal{C} en un point $A \in \mathcal{C}$.

réciroquement tous les points de cette courbe sont sur le cône, pour achever la démonstration du théorème de Dandelin. Celui-ci permet d'affirmer que courbes algébriques planes du second degré et sections coniques planes sont deux manières de désigner la même famille de courbes, que nous appelons plus communément coniques.

THÉORÈME 20 (THÉORÈME DE DANDELIN) *Étant donné un sous ensemble \mathcal{C} de points inclus dans un plan \mathcal{P} plongé dans d'un espace euclidien \mathcal{E}_3 de dimension 3, soit \mathcal{S} l'ensemble des couples de coordonnées de tous les points de \mathcal{C} dans un repère cartésien quelconque de \mathcal{P} .*

\mathcal{S} est l'ensemble des solutions d'une équation $P(x, y) = 0$ où $P \in \mathbb{R}[XY]$ est un polynôme de degré 2, si et seulement \mathcal{C} est l'intersection de \mathcal{P} avec un cône ou cylindre de \mathcal{E}_3 .

Si aucune droite n'est contenue dans \mathcal{C} , il existe dans \mathcal{P} un ou deux points au plus, pour lesquels toute sphère tangente à \mathcal{P} en l'un de ces points appelés foyers de \mathcal{C} , est inscriptible dans un cône ou cylindre, dont l'intersection avec le plan \mathcal{P} est \mathcal{C} .

À ces sphères évoquées dans le théorème, on attribue le nom de sphères de Dandelin. On pourrait croire ce théorème très ancien, puisque cela fait plus de 23 siècles qu'Appolonius a rédigé son traité sur les sections coniques, mais il a fallu attendre le début du XIX^e siècle et le mathématicien Belge Pierre Dandelin, pour être assuré de ce résultat, que l'on peut interpréter de la manière suivante : pour un polynôme quelconque $P \in \mathbb{R}[X, Y]$ du second degré, l'ensemble de toutes les solutions de l'équation $P(x, y) = 0$, peut être représenté dans un plan muni du repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$, par l'intersection de ce plan avec un cône ou un cylindre de l'espace contenant ce plan. Lorsque la conique est non dégénérée, le théorème donne de plus des indications pour

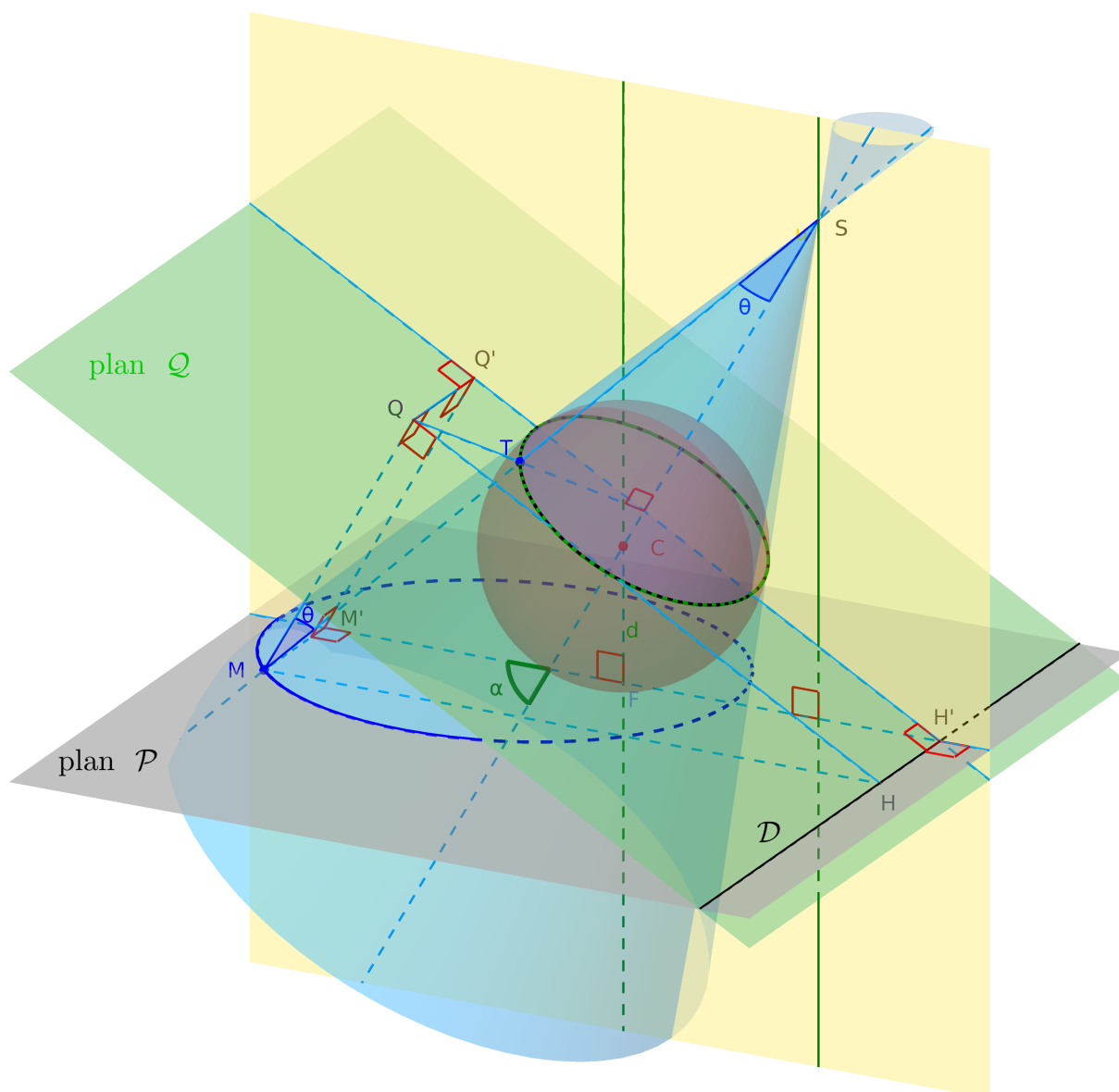


FIGURE V.7 – Le plan \mathcal{P} coupe le cône selon une conique de foyer F et directrice $\mathcal{D} = \mathcal{P} \cap \mathcal{Q}$.

construire tous les cônes possibles. Sur la figure V.7 nous avons représenté une conique \mathcal{C} non dégénérée incluse dans le plan \mathcal{P} de couleur grise, Il s'agit d'une ellipse en bleu sur cette figure, mais ce qui suit est applicable au cas où il s'agirait d'une hyperbole ou d'une parabole. Nous avons vu en II-2-2, III-2-2 et IV-2-4, que pour obtenir un cône ou cylindre qui passe par \mathcal{C} , il fallait pouvoir inscrire dans celui-ci, une sphère \mathcal{S} tangente au plan \mathcal{P} en un point F qui devait être un foyer de \mathcal{C} . Étant donné la droite d perpendiculaire à \mathcal{P} en F , tout point de d à l'exception de F , peut être choisi pour être centre de \mathcal{S} . Lorsque \mathcal{C} est une ellipse, nous avons vu en II-2-2 que deux points de d , autorisent seulement la construction d'un cylindre. Sur la figure V.7, nous avons représenté en jaune le plan perpendiculaire à \mathcal{P} qui contient d , ainsi que l'axe de symétrie de la conique \mathcal{C} , qui selon sa nature contient un ou deux foyers. Les constructions effectuées dans les chapitres précédents, nous ont montré qu'il était nécessaire que le cône recherché ait son sommet et son axe dans ce plan de symétrie de la figure. Le plan \mathcal{Q} représenté

en vert sur la figure V.7 contient le cercle de contact entre la sphère et le cône, et coupe le plan \mathcal{P} selon une droite \mathcal{D} , nous allons montrer que \mathcal{D} est la directrice de \mathcal{C} relative au foyer F choisi pour tracer d .

Toute génératrice du cône coupe \mathcal{P} en un point M que nous projetons orthogonalement :

- en M' sur le plan de symétrie de la figure (en jaune),
- en Q' sur le plan \mathcal{Q} (en vert),
- en H sur la droite $d = \mathcal{P} \cap \mathcal{Q}$.

La construction des rectangles $MQQ'M'$ et $MHH'M'$ permet d'exprimer la distance δ entre M et le plan \mathcal{Q} de plusieurs façons :

$$\delta = MQ = M'Q' = M'H' \cos \alpha = MH \cos \alpha$$

$$\delta = MQ = MT \cos \theta \quad \text{car} \quad \text{mes}(\widehat{QMT}) = \text{mes}(\widehat{TSC}) = \theta$$

Étant donné que (MT) et (MF) sont deux droites tangentes à \mathcal{S} en T et F , on en déduit :

$$MF = MT \quad \text{et} \quad \frac{MF}{MH} = \frac{\cos \alpha}{\cos \theta}$$

Dans les trois chapitres précédents, on a pu prouver que l'ensemble des points d'intersection du plan \mathcal{Q} et du cône est inclus dans la conique \mathcal{C} , et nous venons de prouver qu'ils vérifient de plus la condition d'appartenance à une conique de foyer F , directrice \mathcal{D} et excentricité $e = \frac{\cos \alpha}{\cos \theta}$, cette dernière est nécessairement confondue avec \mathcal{C} . En effet, parmi cinq de ses génératrices, un cône ne peut en contenir plus de deux coplanaires, il est donc impossible de choisir un point sur chacune d'entre elles, de manière à en avoir au moins trois alignés. D'après le théorème 17, par les cinq points d'intersection de nos cinq génératrices avec le plan \mathcal{P} , passe une seule et unique conique non dégénérée qui est nécessairement \mathcal{C} . Nous avons eu besoin de cette caractérisation de \mathcal{C} par foyer, directrice et excentricité, pour achever la démonstration du théorème de Dandelin et prouver que réciproquement, si un point appartient à cette conique, alors il appartient au cône. Étant donné un tel point X du plan \mathcal{P} , soient Y et Z ses projetés orthogonaux respectivement sur la droite \mathcal{D} et sur le plan \mathcal{Q} , on a :

$$X \in \mathcal{C} \quad \Rightarrow \quad \frac{XF}{XY} = \frac{\cos \alpha}{\cos \theta} \quad \Rightarrow \quad XF \cos \theta = XY \cos \alpha = XZ$$

Pour montrer qu'un point X qui vérifie cette dernière égalité est nécessairement sur le cône, nous utiliserons sa puissance $\pi_{\mathcal{S}}(X)$ ¹ par rapport à la sphère \mathcal{S} de centre C passant par F :

$$\pi_{\mathcal{S}}(X) = XF^2 = \frac{XZ^2}{\cos^2 \theta}$$

Soit \mathcal{Q}' le plan parallèle à \mathcal{Q} tel que la distance entre ces deux plans soit XZ (voir figure V.8), son intersection avec le cône est un cercle \mathcal{C}' de centre O , choisissons un point U sur ce cercle, désignons par U' le projeté orthogonal de U sur \mathcal{Q} et par T est le point d'intersection de \mathcal{Q} avec la génératrice (SU) du cône. Les égalités $UU' = XZ = UT \cos \theta$, montrent que la puissance de U par rapport à la sphère \mathcal{S} est :

$$\pi_{\mathcal{S}}(U) = UT^2 = \frac{UU'^2}{\cos^2 \theta} = \frac{XZ^2}{\cos^2 \theta} = \pi_{\mathcal{S}}(X)$$

1. Voir annexe page 156 pour la notion de puissance d'un point par rapport à un cercle ou une sphère.

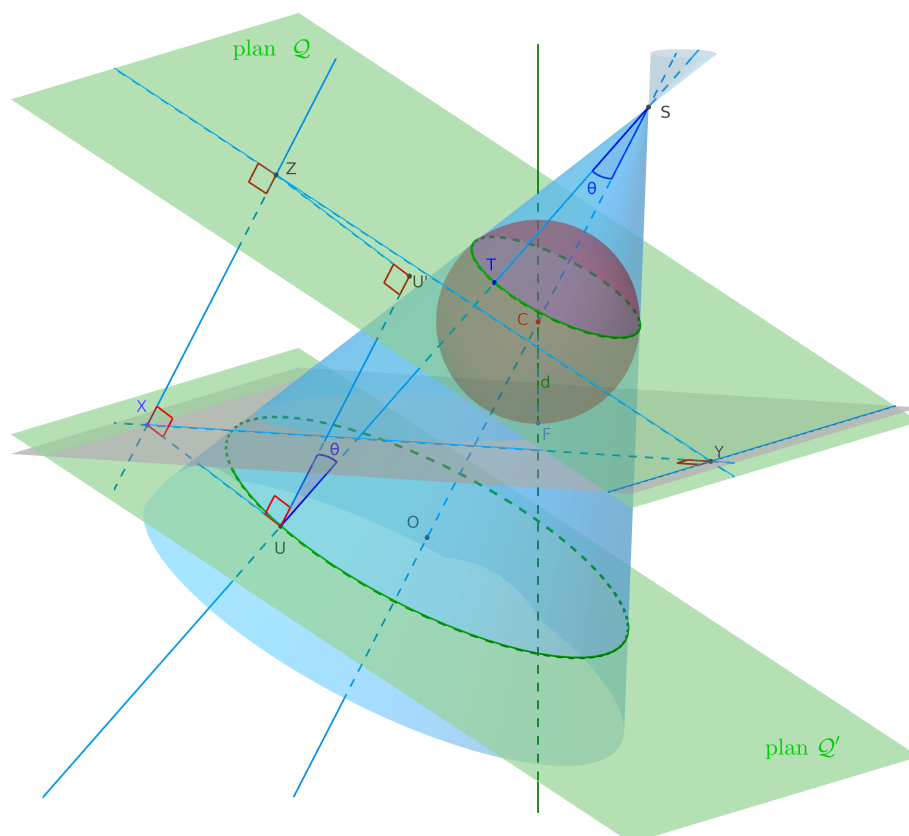


FIGURE V.8 – Si X n'est pas sur le cercle de centre O passant par U , alors $\pi_{\mathcal{S}}(U) \neq \pi_{\mathcal{S}}(X)$.

Le rayon de \mathcal{S} étant r , ces puissances peuvent aussi être calculées de la manière suivante :

$$\pi_{\mathcal{S}}(U) = UC^2 - r^2 = UO^2 + CO^2 - r^2 \quad \text{et} \quad \pi_{\mathcal{S}}(X) = XC^2 - r^2 = XO^2 + CO^2 - r^2$$

Puisque que nous avons prouvé qu'elles sont égales, on en déduit $UO^2 = XO^2$, Le point X qui par hypothèse est dans le plan \mathcal{P} , est donc sur le même cercle de centre O que U , c'est à dire le cercle \mathcal{C}' inclus dans le cône. On est ainsi assuré que tout point de la conique \mathcal{C} définie par foyer et directrice, tel que le point X envisagé ci-dessus, est sur le cône que nous avons pu construire en utilisant une sphère de Dandelin.

Les coniques que nous avons obtenues par intersection d'un cône ou cylindre avec un plan ont pour excentricité $e = \frac{\cos \alpha}{\cos \theta}$, on retrouve donc les résultats suivants :

- Si $\alpha = \frac{\pi}{2}$, alors $e = 0$, quelque soit θ , on obtient un cercle dont on convient que son excentricité est nulle.
- Si $0 = \theta < \alpha < \frac{\pi}{2}$, ce cas peut s'envisager comme celui de l'intersection d'un plan et d'un cylindre, l'excentricité s'exprime plus simplement par $e = \cos \alpha \in]0; 1[$, quelque soit $\alpha \in]0; \frac{\pi}{2}[$, on obtient une véritable ellipse avec deux foyers distincts.
- Si $0 < \theta < \alpha < \frac{\pi}{2}$, alors $e \in]0; 1[$, la conique obtenue est une véritable ellipse avec deux foyers distincts, à condition que le plan ne passe pas par le sommet S du cône, auquel cas on obtiendrait une conique réduite au point S .
- Si $0 < \theta = \alpha < \frac{\pi}{2}$, alors $e = 1$, la conique obtenue est une parabole qui n'a qu'un

seul foyer, à condition que le plan ne passe pas par le sommet du cône, auquel cas on obtiendrait une conique dégénérée en une droite génératrice du cône.

- Si $0 < \alpha < \theta < \frac{\pi}{2}$, alors $e \in]1; +\infty[$, la conique obtenue est une hyperbole. qui admet nécessairement deux foyers, à condition que le plan ne passe pas par le sommet du cône, auquel cas on obtiendrait une conique dégénérée en deux droites sécantes génératrices du cône.
- Si $\alpha = 0$, on obtient une conique dégénérée en deux droites, avec un cône pour lequel $\theta \neq 0$, ces droites sont sécantes, dans le cas d'un cylindre elles sont parallèles.

4-2 Lieu du sommet d'un cône passant par une conique

Étant donné une conique \mathcal{C} qui peut être indifféremment une ellipse, hyperbole ou parabole, en II-2-2, III-2-2 et IV-2-2, nous avons utilisé trois fois la même méthode, pour construire un cône contenant cette conique. Son sommet S devait être dans un plan Π perpendiculaire au plan contenant \mathcal{C} , de plus ce plan Π devait contenir l'axe focal de l'ellipse ou l'hyperbole, ou bien l'axe de symétrie de la parabole. Dans les trois cas nous avons obtenu le sommet S du cône à partir d'un point C , choisi arbitrairement sur une droite $d \subset \Pi$ passant par un foyer F perpendiculairement au plan de \mathcal{C} . Pour préciser le lieu de ce sommet S , nous allons utiliser les coordonnées polaires de $[r, \gamma]$ de ce point C , dans un repère du plan Π , avec une origine placée sur un sommet A_1 de la conique et un vecteur unité égal à $\vec{u} = \frac{1}{A_1F} \overrightarrow{A_1F}$, où F_1 est le foyer le plus proche de A_1 . Pour une parabole, il y a une seule manière de choisir A_1 et F_1 pour définir ce repère, mais deux choix sont possibles pour une ellipse ou hyperbole, ils sont indifférents à la méthode de calcul que nous allons utiliser, pour déterminer les coordonnées polaires dans le plan Π du sommet S .

Cas de l'ellipse

Le sommet S doit être sur la droite d'équation polaire $\theta = 2\gamma$ symétrique de (A_1F_1) par rapport à (A_1C) , il doit être aussi sur la droite symétrique de (A_1F_1) , par rapport à (A_2C) où A_2 est le deuxième sommet de la conique. Dans le cas de figure concernant l'ellipse, il suffit de faire varier γ dans l'intervalle $\left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[$, pour que C parcourt toute la droite d . Pour exprimer une équation en coordonnées polaires de (A_2S) à partir des seuls paramètres $[r, \gamma]$, utilisons les notations habituelles :

- a désigne la demi distance entre les sommets de la conique,
- c désigne demi distance entre les foyers,
- $e = \frac{c}{a} \in]0; 1[$ désigne l'excentricité de cette conique.

La mesure $\alpha(\gamma)$ de l'angle $\left[\overrightarrow{A_2C}, \overrightarrow{A_2F} \right]$ est liée à γ par $\tan(\alpha(\gamma)) = \frac{r \sin \gamma}{a + c}$, la distance entre (A_2S) et l'origine du repère est $h = A_1H = 2a \sin(2\alpha(\gamma))$, et l'angle entre l'axe du repère et la perpendiculaire à (A_2S) a pour mesure $\theta_0 = \frac{\pi}{2} - 2\alpha(\gamma)$ (voir figure V.9).

Le point M de coordonnées polaires $[\rho, \theta]$ appartient à (A_2S) si et seulement si :

$$\rho = \frac{h}{\cos(\theta - \theta_0)} = \frac{2a \sin(2\alpha(\gamma))}{\sin(\theta + 2\alpha(\gamma))} = \frac{2a \tan(2\alpha(\gamma))}{\sin \theta + \tan(2\alpha(\gamma)) \cos \theta}$$

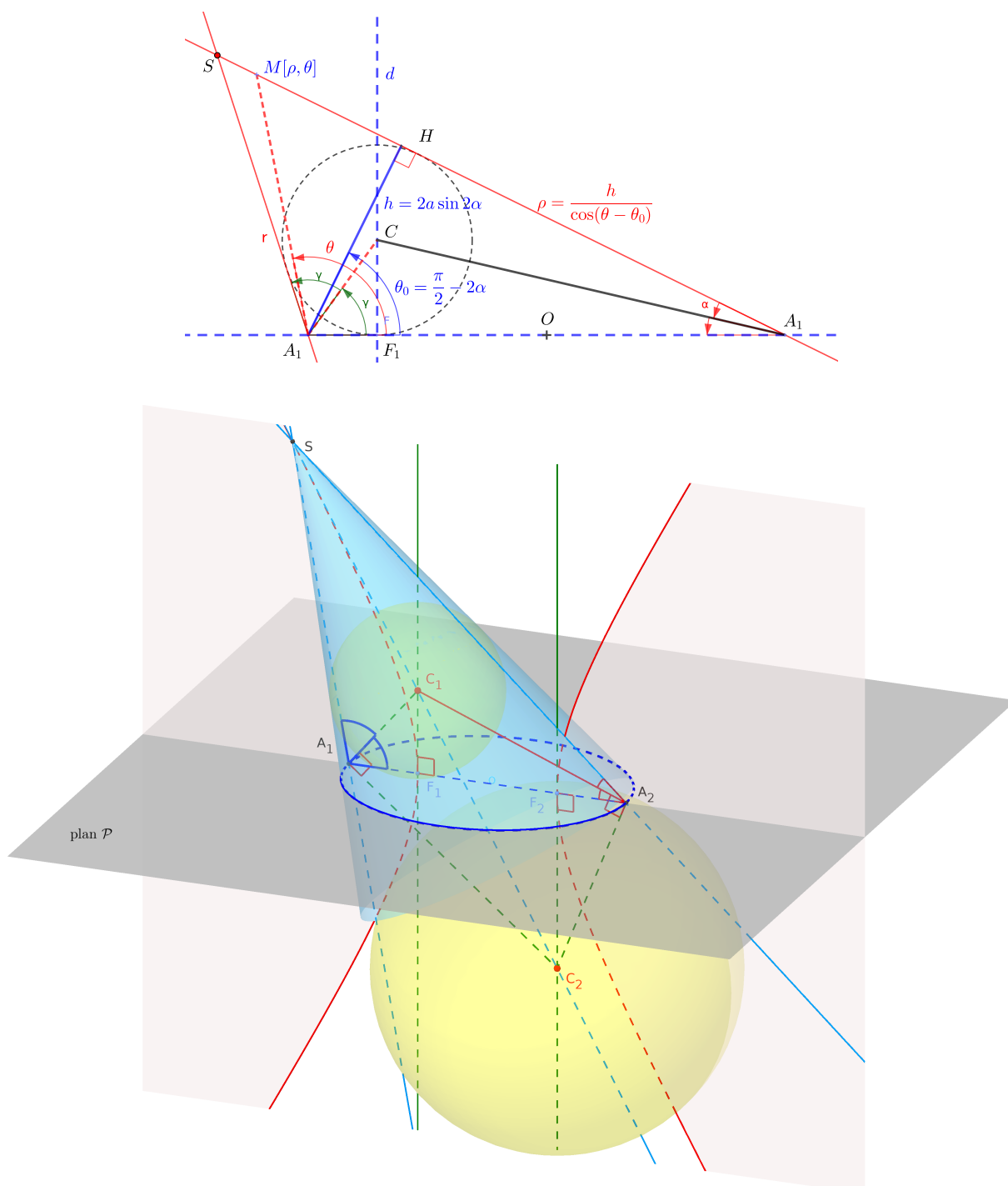


FIGURE V.9 – Ellipse dans le plan \mathcal{P} et son hyperbole focale dans le plan $\Pi \perp \mathcal{P}$.

On a $\tan(2\alpha(\gamma)) = \frac{2 \tan(\alpha(\gamma))}{1 - \tan^2(\alpha(\gamma))} = \frac{2r(a+c) \sin \gamma}{(a+c)^2 - r^2 \sin^2 \gamma}$, qui nous permet d'exprimer cette

équation de (A_2S) en coordonnées polaires :

$$\rho = \frac{4ar(a+c)\sin\gamma}{((a+c)^2 - r^2\sin^2\gamma)\sin\theta + 2r(a+c)\sin\gamma\cos\theta}$$

Pour obtenir le sommet S on doit avoir $\theta = 2\gamma$ et $r = \frac{a-c}{\cos\gamma}$, on en déduit :

$$\rho = \frac{4a(a^2 - c^2)\tan\gamma}{2((a+c)^2 - (a-c)^2\tan^2\gamma)\sin\gamma\cos\gamma + 2(a^2 - c^2)\tan\gamma\cos 2\gamma}$$

$$\rho = \frac{2a(a^2 - c^2)}{(a+c)^2\cos^2\gamma - (a-c)^2\sin^2\gamma + (a^2 - c^2)\cos 2\gamma} = \frac{2a(a^2 - c^2)}{2ac + 2a^2\cos 2\gamma}$$

Les sommets S de coordonnées polaires $\left[\rho, \frac{\frac{a^2-c^2}{c}}{1 + \frac{a}{c}\cos 2\gamma} \right]$, vérifient donc l'équation en coordonnées polaires d'une conique \mathcal{C}' (Voir V-2), d'excentricité $\frac{a}{c}$, de foyer A_1 et paramètre $p = \frac{a^2 - c^2}{c}$. L'angle polaire 2γ varie dans l'intervalle $]-\pi; \pi[$, et peut prendre toute valeur possible dans cet intervalle à l'exception de 0 et π , qui correspondent la position du point C en F pour $\gamma = 0$ ou à l'infini pour $\gamma = \pm\frac{\pi}{2}$. Les deux sommets de l'ellipse ayant des rôles parfaitement symétriques, ils sont tous les deux foyers de \mathcal{C}' , qui admet donc un même axe de symétrie que \mathcal{C} . \mathcal{C}' a pour excentricité $\frac{a}{c} = \frac{1}{e} > 1$. On en déduit que le lieu du sommet d'un cône qui passe par tous les points de l'ellipse, est une hyperbole de laquelle on doit exclure les deux foyers de l'ellipse devenus sommets de cette hyperbole. On dit que ces deux coniques disposées comme sur la figure V.9 sont focales l'une de l'autre. Il est remarquable de constater que les asymptotes de l'hyperbole sont les axes des deux cylindres qui passent par l'ellipse.

Si l'ellipse est un cercle, il est assez simple de constater que le lieu du du sommet d'un cône qui passe par ce cercle est l'axe du cercle : droite perpendiculaire au plan du cercle passant par son centre.

Cas de l'hyperbole

Pour l'hyperbole il suffit d'appliquer rigoureusement les mêmes calculs que pour l'ellipse, en les appliquant au cas de figure V.10, où l'on fait varier γ dans l'intervalle $\left] \frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2} \right]$, pour que C de coordonnées polaires $[r, \pi - \gamma]$ décrive la droite d . Le lieu de S est donc un ensemble de points de coordonnées polaires $[\pi - 2\gamma, \rho]$ qui vérifient l'équation :

$$\rho = \frac{2a(a^2 - c^2)}{2ac + 2a^2\cos 2\gamma} = \frac{\frac{a^2-c^2}{c}}{1 + \frac{a}{c}\cos 2\gamma}$$

La variation de 2γ dans l'intervalle $]\pi; 3\pi[$ d'amplitude 2π , permet d'obtenir toute la conique de foyer A , excentricité $\frac{a}{c} < 1$ et de sommet F . Comme dans le cas précédent, le lieu de S est inclus dans la conique qui échange les sommets et les foyers de la conique de départ, on obtient cette fois-ci une ellipse à laquelle il faut ôter les deux foyers de l'hyperbole de départ.

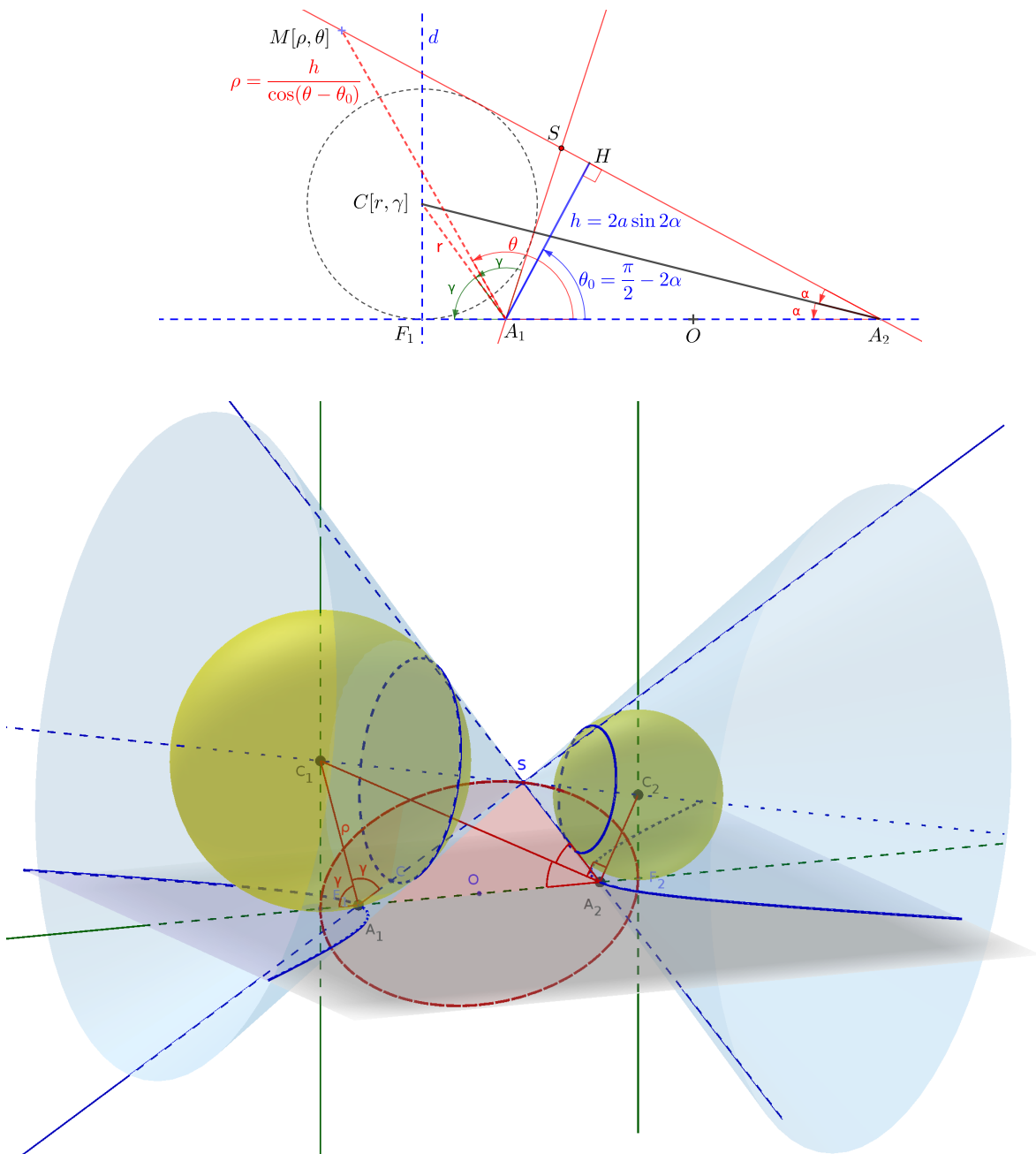


FIGURE V.10 – Hyperbole dans le plan \mathcal{P} et son ellipse focale.

Cas de la parabole

Comme pour les coniques précédentes, le sommet S du cône recherché doit être à l'intersection de deux de ses génératrices obtenues par symétrie de l'axe (AF) , l'une par rapport à la droite (AC) et l'autre par rapport au point C , pour que cette dernière soit parallèle à (AF) . On peut voir sans calcul que S est équidistant du point A et de la droite translaturée de d par \overrightarrow{AF} , car sur la figure V.11, il apparaît immédiatement les égalités $SD = ST$ et $AF = FK = DH$ et par conséquent $SA = SH$. Le lieu du sommet S est donc la parabole de foyer A et directrice obtenue

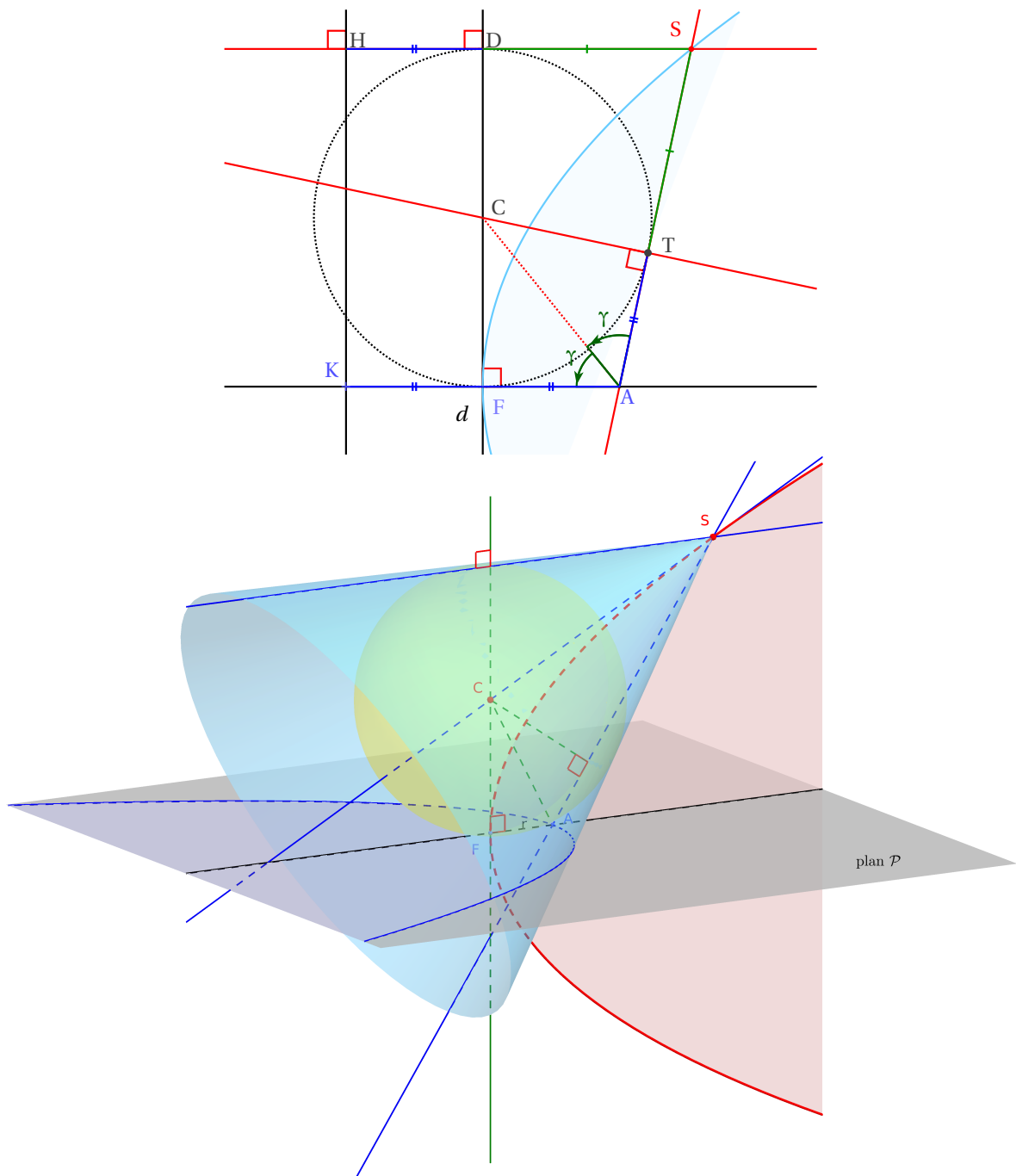


FIGURE V.11 – Deux paraboles focales l'une de l'autre dans deux plans perpendiculaires.

par translation de d par le vecteur \overrightarrow{AF} , de laquelle on doit exclure son sommet F . Comme pour les coniques bifocales, on obtient deux paraboles dites focales l'une de l'autre qui échangent leur sommets et foyers.

V-5 Coniques et isogonalité

5-1 Relation d'isogonalité entre paires de droites

DÉFINITION 13 Dans un plan euclidien, deux paires de droites sécantes $\{d_1, d_2\}$ et $\{d_3, d_4\}$ sont dites isogonales l'une par rapport à l'autre si et seulement si elles admettent une même bissectrice.

La droite d_1 (resp. d_2) est dite conjuguée isogonale de la droite d_2 (resp. d_1) par rapport à la paire $\{d_3; d_4\}$

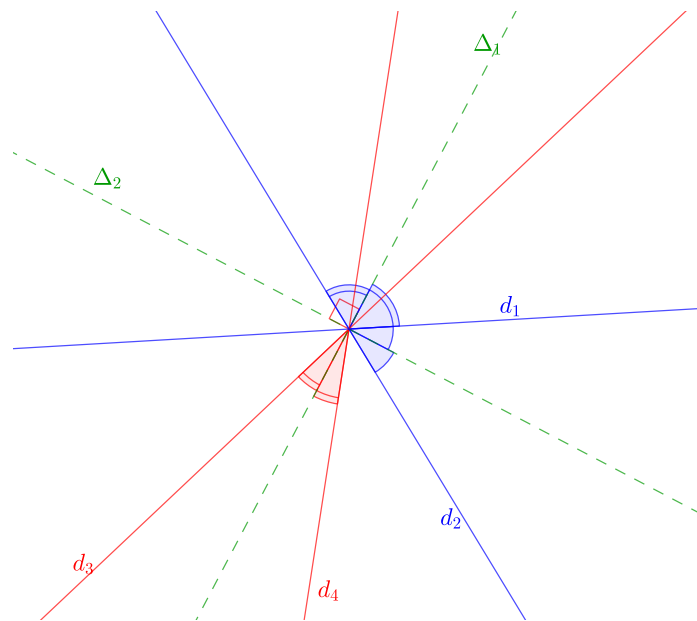


FIGURE V.12 – Paires de droites $\{d_1; d_2\}$ et $\{d_3; d_4\}$ isogonales.

Une bissectrice d'une paire ou couple de droites est un axe tel que la symétrie par rapport à cet axe transforme une droite en l'autre. La définition ci-dessus signifie que les paires de droites ont au moins un axe symétrie commun, et que par conséquent elles en ont un deuxième qui est perpendiculaire au premier. Les bissectrices sont par définition ces deux axes perpendiculaires Δ_1 et Δ_2 qui sont invariants par les symétries axiales qui échangent d_1 et d_2 , ou bien d_3 et d_4 , on en déduit les égalités entre angles de droites² suivantes :

$$\begin{cases} [d_1, \Delta_i] = [\Delta_i, d_2] \\ [\Delta_i, d_3] = [d_4, \Delta_i] \\ [\Delta_i, d_4] = [d_3, \Delta_i] \end{cases} \implies [d_1, d_3] = [d_4, d_2] \quad \text{et} \quad [d_1, d_4] = [d_3, d_2]$$

Les égalités en conclusion de cette implication sont obtenues en additionnant membres à membres deux des égalités prises pour hypothèses, celles-ci sont vérifiées dès que Δ_i est l'une des deux bissectrices communes à $\{d_1, d_2\}$ et $\{d_3, d_4\}$.

Réciproquement si $[d_1, d_3] = [d_4, d_2]$, soit S le point d'intersection de d_1 et d_2 et A un point de d_1 différent de S , désignons par B l'un des deux points de d_2 tel que $SA = SB$. La médiatrice

2. Voir page l'annexe A-2, page 149, pour la définition d'un angle de droites.

Δ de $[AB]$ est l'une des deux bissectrices de d_1 et d_2 telle que l'on ait : $[\Delta, d_1] = [d_2, \Delta]$, par addition de nos deux dernières égalités entre angles de droites, on obtient : $[\Delta, d_3] = [d_4, \Delta]$ qui signifie aussi que Δ est axe de symétrie de d_3 et d_4 . On en déduit que l'isogonalité de $\{d_1, d_2\}$ et $\{d_3, d_4\}$ peut être prouvée par l'une de ces quatre égalités entre angles de droites :

$$[d_1, d_3] = [d_4, d_2] \Leftrightarrow [d_1, d_4] = [d_3, d_2] \Leftrightarrow [d_2, d_3] = [d_4, d_1] \Leftrightarrow [d_2, d_4] = [d_3, d_1]$$

qui signifient chacune que la droite d_2 est conjuguée isogonale de d_1 par rapport à la paire $\{d_3, d_4\}$ (ou bien que d_4 et d_3 sont conjuguées isogonales l'une de l'autre par rapport à $\{d_2, d_1\}$).

5-2 Points conjugués isogonaux relativement à un triangle

Étant donné un triangle ABC et un point M , nous pouvons considérer la droite conjuguée isogonale de (AM) par rapport à $\{(AB); (AC)\}$ ainsi que la conjuguée isogonale de (BM) par rapport à $\{(BA); (BC)\}$, si ces deux conjugués sont sécantes, elles définissent un unique point M' que nous nommerons conjugué isogonal de M par rapport au triangle ABC .

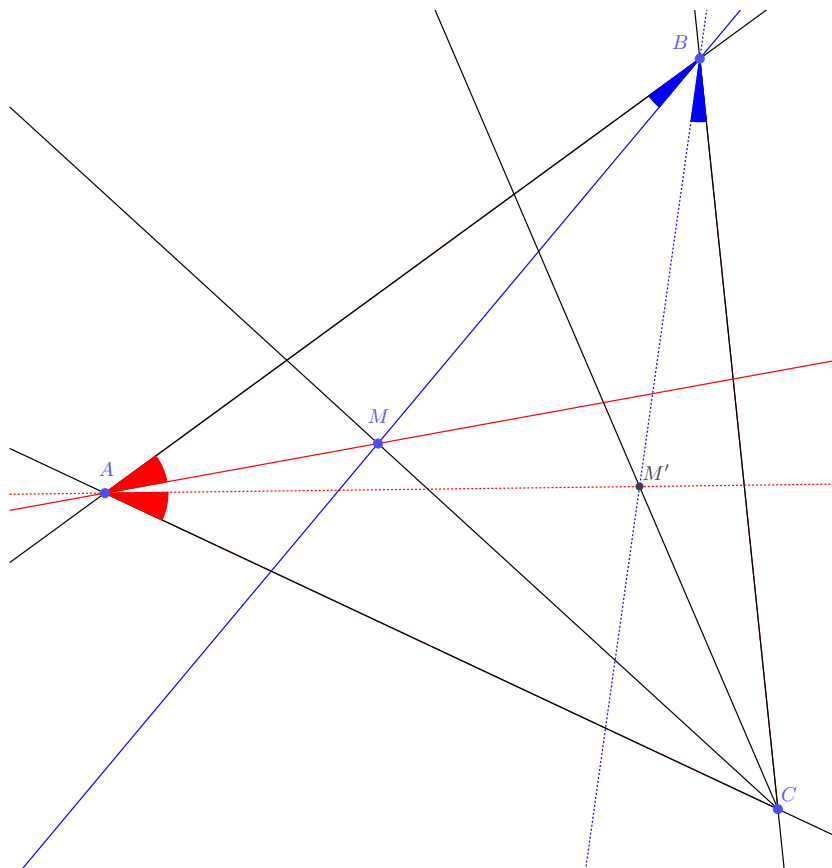


FIGURE V.13 – M et M' Conjugués isogonaux par rapport à ABC .

Au premier abord, cette définition peut sembler «bancale» car on pourrait croire qu'elle dépend du choix des deux sommets du triangle, intervenant dans la considération des paires de droites isogonales. Mais il n'en est rien, car il se produit un miracle :

$$[(AB), (AM)] = [(AM'), (AC)] \text{ et } [(BA), (BM)] = [(BM'), (BC)] \implies [((CA), (CM))] = [((CM'), (CB))]$$

La preuve de cette propriété découle de l'étude des coniques, en étudiant la possibilité de construire une conique tangente aux trois côtés d'un triangle, les théorèmes de Poncelet nous ont permis d'énoncer les conditions d'existence d'un point conjugué isogonal par rapport à ce triangle, en montrant qu'on l'obtient comme deuxième foyer F_2 de la conique dont F_1 est le premier foyer. Celui-ci est alors point de concours des trois droites isogonales de (AF_1) , (BF_1) et (CF_1) respectivement par rapport $\{(AB), (AC)\}$, $\{(BA), (BC)\}$ et $\{(CA), (CB)\}$. Dans l'ouvrage [1], l'isogonalité est étudiée en détails avant de rechercher les coniques tangentes aux côtés d'un triangle, inversement le point de vue adopté ici part de l'étude des coniques, et ce sont les théorèmes de Poncelet qui permettent d'obtenir les résultats tels que le théorème suivant concernant l'isogonalité dans un triangle.

THÉORÈME 21 *Étant donné un triangle ABC et un point $F_1 \notin (AB) \cup (BC) \cup (CA)$, les trois droites isogonales des droites (AF_1) , (BF_1) et (CF_1) par rapport aux trois paires de droites qui supportent les côtés du triangle, vérifient l'une des deux propriétés suivantes :*

- *Elles sont parallèles, cette éventualité a lieu si et seulement si F_1 est sur le cercle circonscrit à ABC ,*
- *Elles sont concourantes en un point F_2 appelé point isogonal de F_1 relativement au triangle ABC . Cette éventualité a lieu si et seulement si P n'est pas sur le cercle circonscrit à ABC .*

Dans la deuxième éventualité les six points obtenus par projection orthogonal de F_1 et de son isogonal F_2 sur les trois côtés du triangles, sont sur un même cercle de centre O milieu de $[F_1 F_2]$. On doit remarquer que si F_1 est point de concours des bissectrices intérieures ou extérieures du triangle, celui si est son propre isogonal et les six projetés se confondent en les trois points de contacts du triangle avec son cercle inscrit ou ses trois cercles exinscrits. La première éventualité énoncée dans le théorème découle du deuxième théorème de Poncelet concernant la parabole, car nous savons que si un point F est sur le cercle circonscrit au triangle en dehors des sommets, alors il est le foyer d'une parabole tangente aux trois côtés du triangle. Le deuxième théorème de Poncelet affirme précisément qu' étant donné deux tangentes passant par un point P , la droite isogonale de (PF) par rapport à ces tangentes est perpendiculaire à la directrice de la parabole. Si on remplace P par les points A , B ou C , on obtient donc trois isogonales parallèles entre elles comme sur les figures V.15 et V.17, car elles sont perpendiculaires à la directrice de la parabole. La figure V.14 illustre la deuxième éventualité énoncée dans le théorème, qui découle elle aussi du deuxième théorème de Poncelet concernant l'ellipse ou l'hyperbole. Nous venons en effet de montrer qu'à partir d'un point $F_1 \notin \mathcal{C} \cup (AB) \cup (BC) \cup (CA)$, nous pouvons construire un deuxième point F_2 puis une conique de foyers F_1 et F_2 tangente aux côtés du triangle, les théorèmes de Poncelet affirment que ces points sont bien isogonaux par rapport à toute paire de tangentes à cette conique. On peut remarquer que ces foyers sont aussi isogonaux par rapport aux asymptotes d'une hyperbole, car ils sont sur une bissectrice de ces deux droites. Si F_1 était le centre du cercle circonscrit à ses trois projetés orthogonaux sur les côtés du triangle, on aurait $F_2 = F_1$ et la conique obtenue serait le cercle inscrit ou l'un des trois cercles exinscrits dans le triangle.

5-3 Définition dans un plan projectif de la conjugaison isogonale

Étant donné un triangle ABC , les considérations du paragraphe V-5 permettent de définir une transformation du plan affine, que nous allons prolonger à tout le plan projectif y compris

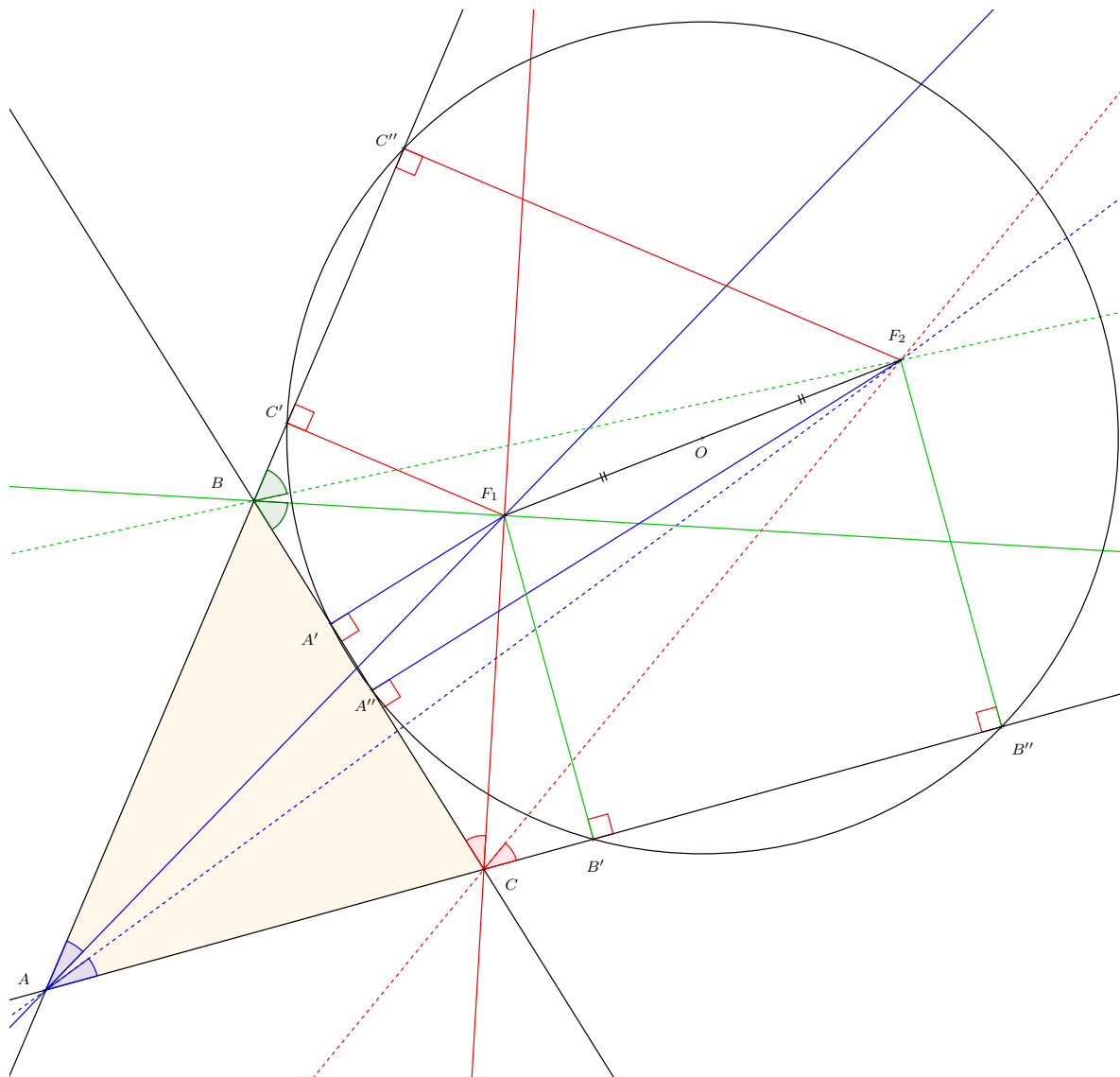


FIGURE V.14 – Isogonales de (F_1A) , (F_1B) et (F_1C) concourantes en F_2 lorsque F_1 n'est pas sur le cercle circonscrit à ABC

les sommets du triangle³ et les points à l'infini, nous l'appellerons conjugaison isogonale par rapport au triangle. Tout point F_1 du plan qui n'appartient ni au cercle \mathcal{C} circonscrit à ABC , ni aux droites qui supportent les côtés du triangle, est transformé en F_2 tel que F_1 et F_2 soient les foyers d'une unique conique tangente aux droites (AB) , (BC) et CA . Sur les figures V.14 à V.21 F_1 et F_2 sont images l'un de l'autre par cette conjugaison isogonale.

Si un point F_1 est sur le cercle circonscrit sans être un sommet du triangle, on a vu en V-V-5, que la seule conique tangente aux supports des trois côtés du triangle, qui admet F_1 pour foyer est une parabole, mais celle-ci possède un unique foyer, et le conjugué isogonal de F_1 ne peut être que le point à l'infini assimilé à la direction de l'axe de cette parabole orthogonal à la droite de Simson de F_1 . Cela se justifie en remarquant que c'est est le seul point commun au trois droites généralisées, obtenues à partir des droites affines conjuguées isogonales de (AF_1) ,

3. Voir en annexe B-2 pour une introduction au plan projectif

(BF_1) et (CF_1) , (voir figure V.17). Cette manière de définir le conjugué isogonal d'un point de \mathcal{C} peut se prolonger aux sommets A , B et C . La droite de Simson d'un sommet d'un triangle étant la hauteur du triangle issue de ce sommet, son conjugué isogonal sera la direction du côté opposé. Par conséquent, nous définirons comme conjugués isogonaux l'un de l'autre, les points à l'infini et les points du cercle circonscrit ainsi associés. On montre qu'étant donné une direction, il existe un unique point dont la droite de Simson admet cette direction, ce que nous justifierons par la suite à l'aide de coordonnées barycentriques.

Pour que notre conjugaison isogonale admette tout le plan projectif comme domaine de définition, il nous reste à définir l'image de tout point aligné avec deux sommets sans être lui-même un sommet. La construction géométrique du conjugué isogonal d'un tel point aboutit au troisième sommet, ce que nous justifierons par la suite à l'aide de coordonnées barycentriques. La transformation que nous venons de définir ainsi sur tout le plan projectif, n'est ni injective ni surjective, car tous les points de $(AB) \setminus \{A, B\}$ par exemple ont la même image C et n'ont aucun antécédent; la plus grande partie du plan projectif sur lequel sa restriction est une bijection involutive, est le complémentaire de $(AB) \cup (BC) \cup (CA) \setminus \{A, B, C\}$. Lorsque l'on recherchera l'image d'une droite, par conjugaison isogonale par rapport à triangle, il faudra donc traiter à part les cas particuliers où cette droite passe par deux ou un seul sommet.

Conjugué isogonal d'un point qui n'est pas sur le cercle circonscrit

Soit \mathcal{C} le cercle circonscrit à ABC , commençons par étudier le cas d'un point F_1 qui n'appartient ni à \mathcal{C} ni à $(AB) \cup (BC) \cup (CA)$, nous avons vu en étudiant les coniques, qu'il admet un isogonal F_2 , si $F_1 = F_2$ ce point est le centre du cercle inscrit ou l'un des centres des trois cercles exinscrits dans le triangle ABC , sinon $F_2 \neq F_1$ et ces deux points distincts sont les foyers d'une ellipse ou hyperbole tangente aux trois droites (AB) , (BC) et (CA) . Leurs coordonnées dans le référentiel (A, B, C) de F_1 sont proportionnelles aux aires algébriques⁴ des triangles F_1BC , AF_1C et ABF_1 , et celles de F_2 aux aires algébriques de F_2BC , AF_2C et ABF_2 . En reprenant la dénomination des points utilisée sur la figure V.14, les produits $F_1A' \times F_2A''$, $F_1B' \times F_2B''$ et $F_1C' \times F_2C''$, sont égaux à la valeur absolue de la puissance des point F_1 et F_2 par rapport au cercle circonscrit à l'hexagone $A'A''B''C''C'$. Le fait qu'on puisse exprimer la valeur absolue de la puissance de F_1 ou F_2 par ces trois produits, provient de symétries par rapport au centre de symétrie de la conique bifocale tangente aux trois côtés du triangle, que nous avons déjà mis en évidence en conclusion des paragraphes II-2-4 et III-2-4. Désignons par p cette puissance et posons $AB = c$, $AC = b$, $BC = a$, cela nous permet d'exprimer les valeurs absolues des aires de ces six triangles :

$$|\Delta(F_1BC)| = \frac{a}{2}F_1A' \quad , \quad |\Delta(AF_1C)| = \frac{b}{2}F_1B' \quad , \quad |\Delta(ABF_1)| = \frac{c}{2}F_1C'$$

$$|\Delta(F_2BC)| = \frac{a|p|}{2F_1A'} \quad , \quad |\Delta(AF_2C)| = \frac{b|p|}{2F_1B'} \quad , \quad |\Delta(ABF_2)| = \frac{c|p|}{2F_1C'}$$

L'étude du placement des points isogonaux faite au paragraphe 6-1, nous permet d'attribuer des signes aux coordonnées barycentriques de F_1 et F_2 , en utilisant les conventions de l'annexe B-3-2, pour définir les aires algébriques des triangles en fonction de leur orientation. On peut observer que dans le cas de figures V.18, avec des points isogonaux F_1 et F_2 à l'intérieur du

4. Voir page 170 pour l'interprétation des coordonnées barycentriques par des aires de triangles, et du signe attribué à ces aires dites algébriques, en fonction de l'orientation de ces triangles.

triangle ABC , les signes de $\Delta(F_iBC)$, $\Delta(AF_iC)$ et $\Delta(ABF_i)$ sont tous positifs ou tous négatifs selon l'orientation de ABC . Avec des points isogonaux à l'extérieur, dans le cas de figure V.20, les aires algébriques $\Delta(F_1BC)$, $\Delta(AF_1C)$ et $\Delta(ABF_1)$ ont le même signe respectivement que celles des aires algébriques $\Delta(F_1'BC)$, $\Delta(AF_1'C)$ et $\Delta(ABF_1')$, par contre elles sont toutes les trois de signes contraires dans le cas de figure V.19. Mais puisque ces coordonnées sont définies à un coefficient de proportionnalité près, on peut en déduire que si (x, y, z) désigne un triplet de coordonnées de F_1 , dans le référentiel (A, B, C) , alors $\left(\frac{a^2}{x}, \frac{b^2}{y}, \frac{c^2}{z}\right)$ est un triplet de coordonnées de F_2 dans le même référentiel. Pour inclure les points sur les droites qui supportent les côtés du triangle ABC , il serait plus judicieux d'utiliser les coordonnées (a^2yz, xb^2z, xyc^2) . Par exemple, tout point sur (BC) autre que B et C a des coordonnées de la forme $(0, y, z)$ avec $yz \neq 0$, son isogonal est bien A de coordonnées $(a^2yz, 0, 0)$. Il n'y a que les sommets A, B et C pour lesquels l'attribution d'un isogonal ne peut être déterminée, aussi bien par construction géométrique que par le calcul de (a^2yz, b^2xz, c^2yz) , puisqu'on aboutirait au triplet $(0, 0, 0)$ qui est le seul à ne pas pouvoir définir un point du plan projectif. On peut remarquer que si $F_1 = F_2$ on doit avoir des coordonnées proportionnelles, qui impliquent les égalités suivantes $\frac{a^2}{x^2} = \frac{b^2}{y^2} = \frac{c^2}{z^2}$, on peut en déduire que le centre du cercle inscrit dans ABC admet (a, b, c) pour coordonnées, et que celles des cercles exinscrits situés dans les secteurs angulaires \widehat{CAB} , \widehat{ABC} et \widehat{BCA} sont proportionnelles respectivement à $(-a, b, c)$, $(a, -b, c)$ et $(a, b, -c)$.

Conjugué isogonal d'un point sur le cercle circonscrit

Tout point F différent de A, B ou C admet pour coordonnées barycentriques dans le référentiel (A, B, C) , des produits mixtes⁵ que l'on peut calculer à l'aide de la relation des sinus dans le triangle ABC et du théorème de l'angle inscrit, dans le cas particulier où F appartient au cercle de diamètre d circonscrit à ABC . Sans restriction de généralité, on peut supposer que nous sommes dans la configuration particulière de la figure V.15, où les points F, A, B et C sont dans cet ordre là, sur le cercle circonscrit à ABC ; nous pourrions reproduire les mêmes calculs en permutant les points A, B et C si F était placé autrement sur le cercle.

$$\begin{aligned} \bullet \quad x_F &= \left[\overrightarrow{FB} \wedge \overrightarrow{FC} \right] = FB \times FC \times \sin(\overrightarrow{FB}, \overrightarrow{FC}) = FB \times FC \times \sin(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \\ \text{donc : } x_F &= \frac{FA \times FB \times FC \times a}{FA \times d} \\ \bullet \quad y_F &= \left[\overrightarrow{FC} \wedge \overrightarrow{FA} \right] = FC \times FA \times \sin(\overrightarrow{FC}, \overrightarrow{FA}) = -FC \times FA \times \sin(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}) \\ \text{donc : } y_F &= -\frac{FA \times FB \times FC \times b}{FB \times d} \\ \bullet \quad z_F &= \left[\overrightarrow{FA} \wedge \overrightarrow{FB} \right] = FA \times FB \times \sin(\overrightarrow{FA}, \overrightarrow{FB}) = FA \times FB \times \sin(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) \\ \text{donc : } z_F &= \frac{FA \times FB \times FC \times c}{FC \times d} \end{aligned}$$

Dans le cas de figure V.15 que nous avons choisi pour illustrer nos calculs, il a fallu opérer un changement de signe dans le cas de y_F , pour tenir compte des angles $\left[\overrightarrow{FC}, \overrightarrow{FA} \right]$ et $\left[\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA} \right]$, qui sont d'orientation opposée. Le triplet (x_F, y_F, z_F) est donc proportionnel à $\left(\frac{a}{FA}, \frac{-b}{FB}, \frac{c}{FC} \right)$, on en déduit que le triplet de coordonnées $\left(\frac{a^2}{x_F}, \frac{b^2}{y_F}, \frac{c^2}{z_F} \right)$ est proportionnel à $(aFA, -bFB, cFC)$.

5. Voir fin du paragraphe B-3 pour une définition du produit mixte de deux vecteurs

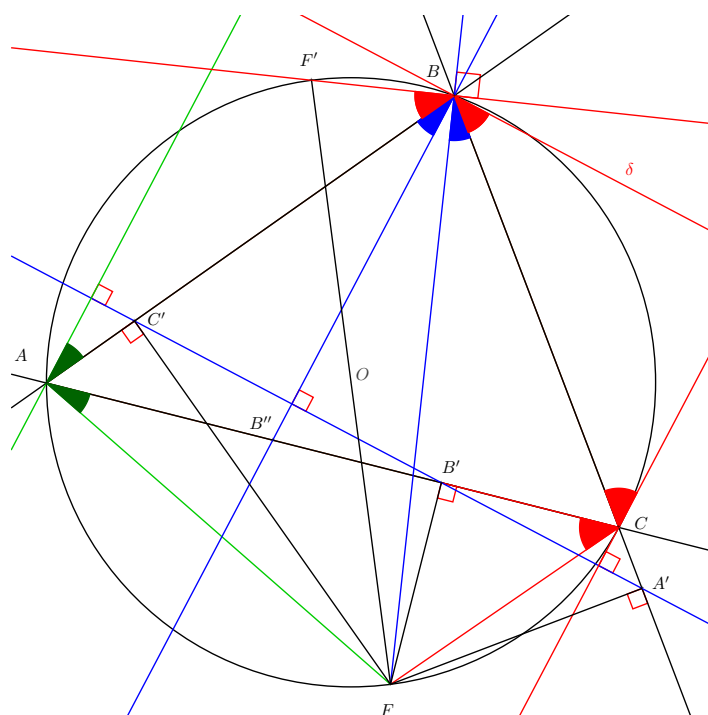


FIGURE V.15 – Conjugaison isogonale de points sur le cercle circonscrit au triangle ABC .
L'isogonal de F est le point à l'infini associé à la direction perpendiculaire à $(A'C')$: droite de Simson de F ,
l'isogonal de F' est le point à l'infini associé à la direction de $\delta // (A'C')$.

Nous allons montrer que le point qui admet ces coordonnées barycentriques, est un point à l'infini, en utilisant la relation de Ptolémée que nous allons redémontrer. Elle permet d'affirmer que si F , A , B et C sont des points inscrits dans cet ordre sur le cercle \mathcal{C} , alors :

$$BC \times AF + AB \times CF = AC \times BF \Leftrightarrow aFA - bFB + cFC = 0$$

En effet, si B'' désigne l'intersection du segment $[CA]$ avec la droite isogonale de (BF) par rapport à $\{(BA), (BC)\}$, on a $\widehat{CBB''} = \widehat{FBA}$ et $\widehat{B''CB} = \widehat{AFB}$, d'où la similitude des triangles CBB'' et AFB qui permet d'établir les égalités $\frac{CB''}{AF} = \frac{BC}{BF}$ et $CB'' \times BF = BC \times AF$. De même en permutant A et C , on obtient la similitude des triangles ABB'' et BCF qui permet d'établir les égalités $\frac{AB''}{CF} = \frac{AB}{BF}$ et $AB'' \times BF = AB \times CF$.

On obtient la relation de Ptolémée par addition membres à membres de ces égalités :

$$BC \times AF + AB \times CF = CB'' \times BF + AB'' \times BF = (CB'' + AB'')AC \times BF = AC \times BF$$

Le conjugué isogonal de $F \in \mathcal{C}$ est donc bien un point à l'infini, assimilable à la direction du vecteur $\vec{u} = \frac{a^2}{x}\vec{OA} + \frac{b^2}{y}\vec{OB} + \frac{c^2}{z}\vec{OC}$ indépendant du point O , et nous allons vérifier de plus qu'il a bien la direction orthogonale à la droite de Simson⁶ du point $F \in \mathcal{C}$. En utilisant les coordonnées équivalentes $(a.AF, -b.BF, c.CF)$ et en remplaçant O par B , on obtient le vecteur $a.AF.BA + c.CF.BC = (a.AF + c.CF)BG$ colinéaire à \vec{u} , où G désigne le barycentre de $(A; a.AF)$

6. Voir annexe A-4 page 153 pour la définition de la droite de Simson illustrée par le figure V.15.

et $(C; c.CF)$. Comme prévu, on peut vérifier que la direction de ce vecteur est bien orthogonale à la droite de Simson de F , en constatant que $G = B''$. Pour cela, posons $\theta = \left| \text{mes}[\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BF}] \right|$, si d désigne le diamètre du cercle circonscrit à ABC , l'application de la relation des sinus dans les triangles ABC permet d'établir les égalités :

$$aAF = d^2 \sin \hat{A} \sin(\hat{B} - \theta) \quad \text{et} \quad cCF = d^2 \sin \hat{C} \sin \theta$$

La relation des sinus dans les triangles $CB'B$ et $AB''B$ fournit les égalités :

$$\frac{BB''}{\sin \hat{C}} = \frac{CB''}{\sin(\hat{B} - \theta)} \quad \text{et} \quad \frac{BB''}{\sin \hat{A}} = \frac{AB''}{\sin \theta}$$

$$\text{On en déduit : } \frac{CB''}{aAF} = \frac{AB''}{cCF} = \frac{BB''}{d^2 \sin \hat{A} \sin \hat{C}}$$

Cette relation de proportionnalité montre que nous avons des couples de coordonnées qui définissent le même barycentre sur le segment $[AC]$, le premier couple de coordonnées (aAF, cCF) nous a servi à définir G , et le deuxième couple (CB'', AB'') permet de retrouver le point B'' sur le segment $[AC]$. Nous avons ainsi établi que si un point F différent de A, B ou C est sur le cercle circonscrit à ABC et admet pour coordonnées (x, y, z) dans le référentiel (A, B, C) , son conjugué isogonal est un point à l'infini associé à la direction du vecteur \vec{u} colinéaire à $\overrightarrow{B''F}$, et qu'il admet donc pour coordonnées les triplets $(a.AF, -b.BF, c.CF)$, $\left(\frac{a^2}{x}, \frac{b^2}{y}, \frac{c^2}{z} \right)$ ou bien (a^2yz, xb^2z, xyc^2) ; nous retrouvons les mêmes expressions que pour le calcul de coordonnées du conjugué isogonal d'un point différent de A, B ou C qui n'est pas sur le cercle, seuls les points A, B et C ont des conjugués isogonaux dont les coordonnées ne peuvent pas être calculées de cette manière. En désignant par $M(x, y, z)$ le point de coordonnées barycentriques $(x, y, z) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \setminus \{(0, 0, 0)\}$ dans le référentiel (A, B, C) , on peut donc définir l'application φ suivante sur tout le plan projectif qui contient ABC :

$$\varphi : \quad \mathcal{P} \quad \longrightarrow \quad \mathcal{P}$$

$$M(x, y, z) \quad \longmapsto \quad M'(a^2yz, b^2xz, c^2xy)$$

Cette application coïncide avec la conjugaison isogonale par rapport au triangle ABC , pour tous les points excepté les sommets du triangle. Pour tous les points qui n'appartiennent pas à $(AB) \cup (BC) \cup (CA)$, il sera plus judicieux d'utiliser les coordonnées $\left(\frac{a^2}{x}, \frac{b^2}{y}, \frac{c^2}{z} \right)$, qui montrent que la restriction de φ au complémentaire de $(AB) \cup (BC) \cup (CA)$ est une bijection involutive. Cela est clair pour les points à distance finie non situés sur \mathcal{C} , pour les autres, considérons un point à l'infini de coordonnées (x, y, z) telles que $x + y + z = 0$, qui n'est pas l'un des points à l'infini des droites $(AB), (BC)$ ou (CA) . On a donc $xyz \neq 0$, ce qui permet de définir le point F' de coordonnées $(x', y', z') = \left(\frac{a^2}{x}, \frac{b^2}{y}, \frac{c^2}{z} \right)$ qui est nécessairement sur le cercle circonscrit à ABC , car dans le cas contraire, il n'y aurait que deux possibilités :

- **soit F' est à distance finie,**

puisqu'il est supposé ne pas être sur le cercle, les coordonnées $\left(\frac{a^2}{x'}, \frac{b^2}{y'}, \frac{c^2}{z'} \right) = (x, y, z)$; définirait un point à distance finie selon les calculs effectués plus haut, il y a contradiction avec le fait que nous retrouvons les coordonnées du point à l'infini F .

- **ou bien F' est un point à l'infini,**

on a $z = -x - y$, F' admet les coordonnées $(a^2 y(-x - y), b^2 x(-x - y), c^2 xy)$ dont la somme est $s = -b^2 x^2 + (c^2 - a^2 - b^2)yx - a^2 y^2$. Mais cette somme ne peut pas être nulle pour faire de F' un point à l'infini, car pour un $y \in \mathbb{R}$ fixé, nous serions amené à résoudre une équation du second degré en l'inconnue x de discriminant $\Delta = y^2((c^2 - a^2 - b^2)^2 - 4a^2 b^2)$. Or $\Delta < 0$, car dans le triangle ABC non aplati, on a $|a - b| < c < a + b$ qui implique $a^2 + b^2 - 2ab < c^2 < a^2 + b^2 + 2ab$ puis $-2ab < c^2 - a^2 - b^2 < 2ab$, et finalement $(c^2 - a^2 - b^2)^2 < 4a^2 b^2$.

Tout point du cercle circonscrit à ABC différent de A , B ou C est donc à la fois l'image et l'antécédent par φ d'un unique point à l'infini, et toute direction différente de celle des droites (AB) , (BC) ou (CD) est à la fois image et antécédent d'un unique point du cercle. En traitant à part les cas particuliers qui concernent chaque sommet du triangle dont la droite de Simson supporte son côté opposé, cela prouve qu'étant donné une direction, il existe un unique point du cercle dont la droite de Simson admet cette direction.

5-4 Image par conjugaison isogonale d'une droite est une conique

Les formules qui définissent ci-dessus l'application φ fournissent une équation en coordonnées barycentriques du cercle circonscrit à ABC , dans le référentiel (A, B, C) , car nous avons montré qu'un point différent de A , B ou C est sur ce cercle, si et seulement si son conjugué isogonal est à l'infini, d'où l'équation figurant dans l'énoncé du lemme suivant, trivialement vérifiée aussi par A , B et C :

LEMME 3 *Étant donné un triangle ABC tel que $BC = a$, $CA = b$ et $AB = c$, le cercle circonscrit à ABC est conjugué isogonal de la droite de l'infini et admet pour équation barycentrique dans le référentiel (A, B, C) : $a^2 yz + b^2 xz + c^2 xy = 0$.*

Lorsque l'on cherche à transformer toute autre droite par conjugaison isogonale, on obtient alors les autres résultats du théorème suivant, illustrés par la figure V.16

THÉORÈME 22 *Dans le plan projectif, L'image par conjugaison isogonale par rapport à un triangle d'une droite projective, est une conique non dégénérée circonscrite au triangle, si et seulement si nous sommes dans l'un des quatre cas suivants :*

- *La droite de l'infini à pour image le cercle circonscrit au triangle.*
- *Si la droite n'est pas la droite de l'infini et n'intercepte pas le cercle circonscrit au triangle, la conique obtenue est une ellipse qui n'est pas un cercle. .*
- *Si la droite intercepte le cercle circonscrit au triangle en deux points distincts qui ne sont pas sommets du triangle la conique obtenue est une hyperbole, celle-ci est équilatère si et seulement si la droite passe par le centre du cercle circonscrit au triangle.*
- *Si la droite est tangente au cercle circonscrit au triangle en un point qui n'est pas sommet du triangle, la conique obtenue est une parabole.*

Les cas particuliers qui présentent moins d'intérêts et que nous avons exclus des hypothèses de ce théorème sont les suivants :

- L'image de la droite projective passant par deux sommets du triangle est réduite à trois points, deux à l'infini images des deux sommets par lesquels passe la droite, le troisième est image de tous les autres points de cette droite (même celui à l'infini !), c'est le troisième sommet du triangle qui n'est pas sur la droite.

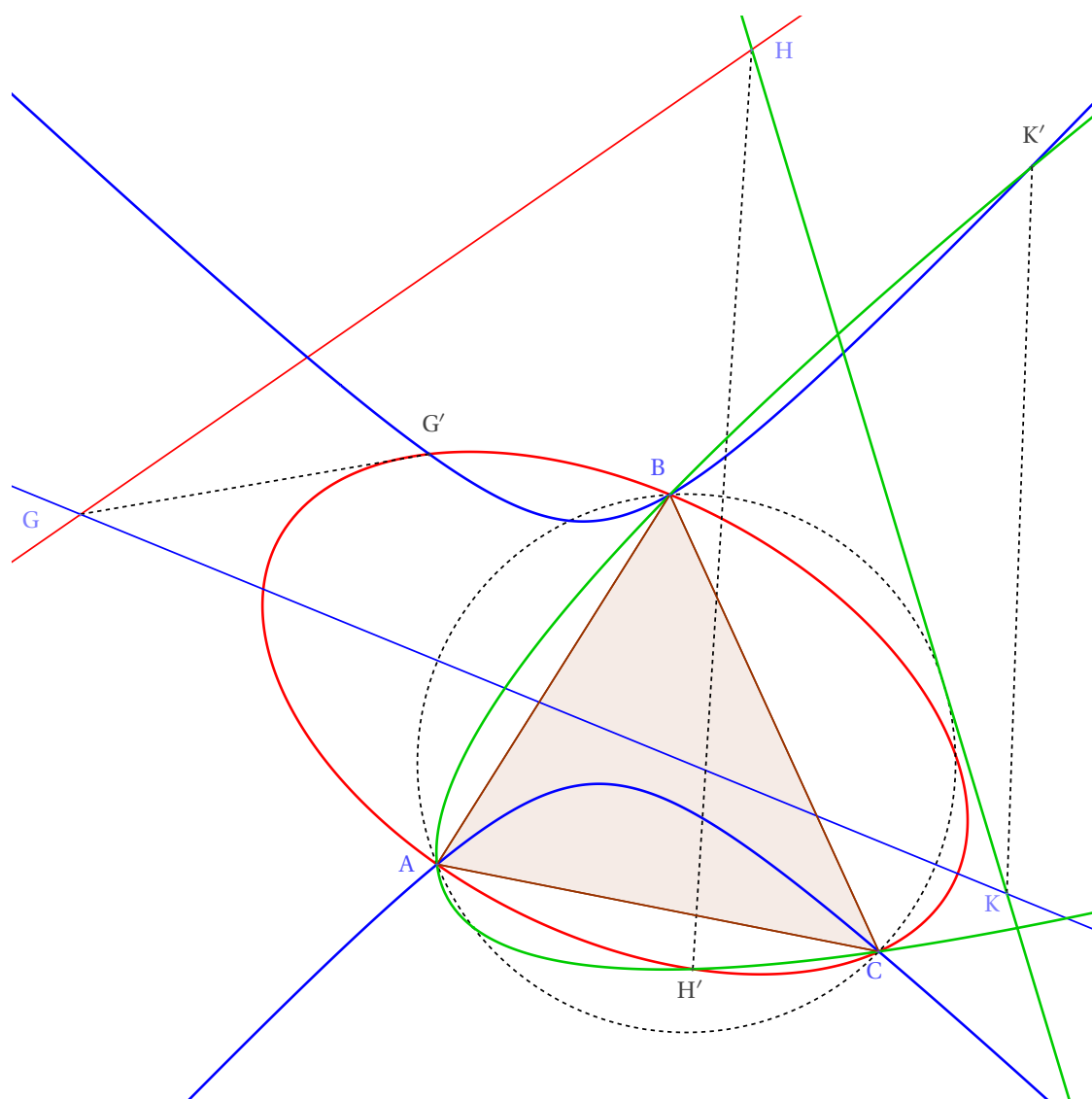


FIGURE V.16 – Images de trois droites par conjugaison isogonale on a associé de la même couleur droites et coniques conjuguées isogonales l’une de l’autre par rapport à ABC .

- Pour obtenir l’image d’une droite projective \mathcal{D} passant par un seul sommet, il faut considérer :
 - la droite \mathcal{D}' isogonale de \mathcal{D} par rapport à la paire de droites qui supportent les côtés du triangle issus du sommet en question,
 - le point de \mathcal{D}' qui n’admet aucun antécédent, il s’agit du point I situé à l’intersection avec le support du côté opposé du dit sommet,
 - et l’image de ce sommet qui est le point à l’infini de la droite qui supporte son côté opposé, que nous désignerons par I_∞ .
 On obtient $\varphi(\mathcal{D}) = \{I_\infty\} \cup \mathcal{D}' \setminus \{I\}$, les points à l’infini de \mathcal{D} et \mathcal{D}' sont à la fois images et antécédents du deuxième point d’intersection du cercle circonscrit au triangle avec respectivement \mathcal{D}' et \mathcal{D} .

Nous avons illustré le théorème 22 par la figure V.16, qui fait apparaître les trois types de coniques non dégénérées, de la même couleur que les droites dont elles sont l’image par

conjugaison isogonale. Pour prouver les trois dernières assertions de ce théorème, considérons l'équation $px + qy + rz = 0$ en coordonnées barycentriques dans le référentiel (A, B, C) , d'une droite projective \mathcal{D} qui ne passe pas par les sommets du référentiel. Tout point de coordonnées (x, y, z) qui n'est pas sur l'une des trois droites (BC) , (CB) et (AB) , appartient à $\varphi(\mathcal{D})$ si et seulement si son conjugué isogonal appartient à \mathcal{D} , il est donc nécessaire et suffisant que ses coordonnées vérifient l'équation $pa^2yz + qb^2xz + rc^2xy = 0$. On a donc le résultat suivant :

LEMME 4 *La droite d'équation barycentrique $px + qy + rz = 0$ dans le référentiel (A, B, C) , est transformée par conjugaison isogonale par rapport au triangle ABC , en la conique d'équation*

$$pa^2yz + qb^2xz + rc^2xy = 0$$

Les sommets du triangle ABC vérifient cette dernière équation, nous savions déjà qu'ils sont images des points d'intersection de \mathcal{D} avec les trois droites projectives qui supportent les côtés du triangle, il peut s'agir d'un point à l'infini lorsque \mathcal{D} est parallèle à l'un des côtés, Dans tous les cas la conique est donc circonscrite au triangle ABC , le nombre de ses points à l'infini déterminera de quel type il s'agit :

- S'il elle n'admet aucun point à l'infini, il s'agit d'une ellipse. Les seuls points ayant un conjugué isogonal à l'infini sont sur le cercle \mathcal{C} circonscrit à ABC , la conique image de \mathcal{D} est donc une ellipse si et seulement si \mathcal{D} n'intercepte pas \mathcal{C} , Elle ne peut pas être un cercle car elle est nécessairement différente de l'image de la droite de l'infini qui a pour image, l'unique cercle \mathcal{C} qui passe par A, B et C .
- Pour que la conique image de \mathcal{D} soit une hyperbole, il faut et il suffit qu'elle ait deux points à l'infini, il est donc nécessaire que \mathcal{D} intercepte \mathcal{C} en deux points distincts sans passer par un sommet.
- Pour que la conique image de \mathcal{D} soit une parabole, il faut et il suffit qu'elle ait un seul point à l'infini, il est donc nécessaire que \mathcal{D} soit tangente à \mathcal{C} en un point qui n'est pas sommet du triangle.

Dans les deux dernières situations, \mathcal{D} ne doit pas passer par un ou deux sommets du triangle, pour éviter les cas particuliers expliqués en détails à la suite de l'énoncé du théorème.

Inversement, toute conique \mathcal{F} passant par les trois points du référentiel (A, B, C) admet une équation en coordonnées barycentriques, du second degré homogène de la forme $pxy + qxz + ryz = 0$, un point de coordonnées (x, y, z) qui n'est pas sur les droites (AB) , (BC) ou (CA) appartient à $\varphi(\mathcal{F})$, si et seulement si l'une des deux équations suivante est vérifiée :

$$p\frac{a^2b^2}{xy} + q\frac{a^2c^2}{xz} + r\frac{b^2c^2}{yz} = 0 \quad \implies \quad a^2b^2z + qa^2c^2y + rb^2c^2x = 0$$

En incluant A, B et C et d'éventuels points à l'infini par lesquels passe \mathcal{F} , on voit que cette conique est transformée par conjugaison isogonale par rapport à ABC , en une droite projective \mathcal{D} . La conique recoupe le cercle circonscrit à ABC en un seul et unique quatrième point, conjugué isogonal de l'unique point à l'infini de \mathcal{D} , on savait déjà d'après les résultats du paragraphe V-1-3 que nous aurions $\mathcal{F} = \mathcal{C}$, si \mathcal{C} et \mathcal{F} avaient un cinquième point d'intersection.

Lorsque $\varphi(\mathcal{D})$ est une hyperbole, la direction de ses asymptotes est indiquée par les images de points situés sur \mathcal{C} . On obtient donc une hyperbole équilatère si et seulement si la droite \mathcal{D} dont elle est image, intercepte le cercle en deux points dont les droites de Simson sont perpendiculaires. Nous allons montrer que c'est le cas si et seulement si ce sont des droites de Simson de points diamétralement opposés, ce qui signifie que pour obtenir une hyperbole

équilatère, la droite \mathcal{D} doit passer par O . Étant donné deux points F et F' diamétralement opposés sur \mathcal{C} , soit δ la droite conjuguée isogonale de (BF') par rapport à la paire de droites $\{(BA), (BC)\}$ définie par l'égalité entre angle de droites $[(BF'), (BC)] = [(BA)\delta]$ (voir figure V.15). nous avons déjà $[(BC), (BF)] = [(BB''), (BA)]$, de ces deux égalités on déduit par addition $[(BF'), (BF)] = [(BB''), \delta]$. Ces angles de droites admettent donc $\frac{\pi}{2}$ pour mesure, car F et F' sont diamétralement opposés sur le cercle circonscrit à (ABC) ; on en déduit que leurs droites de Simson sont perpendiculaires, car les droites (BB'') et δ sont des représentantes des points à l'infini obtenus lors de la construction du conjugué isogonal de F et F' . On a déjà mis en évidence que des points distincts ont des droites de Simson de directions différentes, cela permet d'affirmer que réciproquement, deux droites de Simson perpendiculaires sont affectées nécessairement à des points diamétralement opposés. On peut en déduire aussi le corollaire suivant :

COROLLAIRE 2 *Si une hyperbole est circonscrite à un triangle, elle est équilatère si et seulement si elle passe par l'orthocentre du triangle.*

Puisque l'image par conjugaison isogonale par rapport au triangle de l'hyperbole en question est une droite, pour qu'elle soit équilatère, il faut et il suffit que cette droite passe par le centre du cercle circonscrit au triangle. On pourra alors consulter le paragraphe V-7-2 qui explique pourquoi dans un triangle, orthocentre et centre du cercle circonscrit sont conjugués isogonaux.

V-6 Conique tangente aux trois côtés d'un triangle

6-1 Conique tangente aux trois côtés d'un triangle avec un foyer fixé

Revenons sur les problèmes posés dans les chapitres précédents, consistant à construire une conique tangente aux trois côtés d'un triangle ABC . Soit \mathcal{C} est le cercle circonscrit à ABC , nous avons vu en IV-3-4, que pour construire une parabole tangente aux trois droites qui supportent les côtés du triangle, il faut et il suffit de choisir son foyer sur \mathcal{C} privé des sommets A , B et C . Pour construire une hyperbole ou une ellipse tangente aux supports des côtés d'un triangle, il faut que les trois projetés orthogonaux du foyer sur ces droites, soit sur un cercle que nous avons appelé cercle principal de la conique bifocale. En partant de l'hypothèse $F_1 \notin \mathcal{C}$, la construction du cercle \mathcal{C} de centre O , circonscrit aux trois projetés devient possible d'après la contraposée du théorème 26, Le procédé vu en 6-4 pour construire une ellipse, puis celui vu en III.12 pour construire une hyperbole tangente aux trois côtés du triangle ABC , consiste dans les deux cas à prendre pour deuxième foyer le point F_2 symétrique de F_1 par rapport au centre O . Dans les deux cas de figure, la conique recherchée est le lieu du centre d'un cercle passant par F_1 , et tangent au cercle directeur de centre F_2 . On obtient une ellipse si F_1 est strictement à l'intérieur de ce cercle ou une hyperbole s'il est strictement à l'extérieur.

D'après ce que nous avons vu dans les paragraphes précédents, il est clair que si le premier point choisi pour être foyer d'une conique tangente aux trois droites qui supportent les côtés d'un triangle, est sur le cercle circonscrit au triangle, sans être l'un des sommets du triangle, on obtient une parabole. Si le premier point choisi pour être foyer n'est ni sur les droites supportant les côtés du triangle, ni sur le cercle circonscrit, on obtient une conique bifocale ou un cercle. Seul quatre choix possibles aboutissent à des cercles, l'un inscrit et aux trois autres exinscrits dans le triangle, dans tous les autres cas, pour savoir si l'on obtient une ellipse ou une hyperbole,

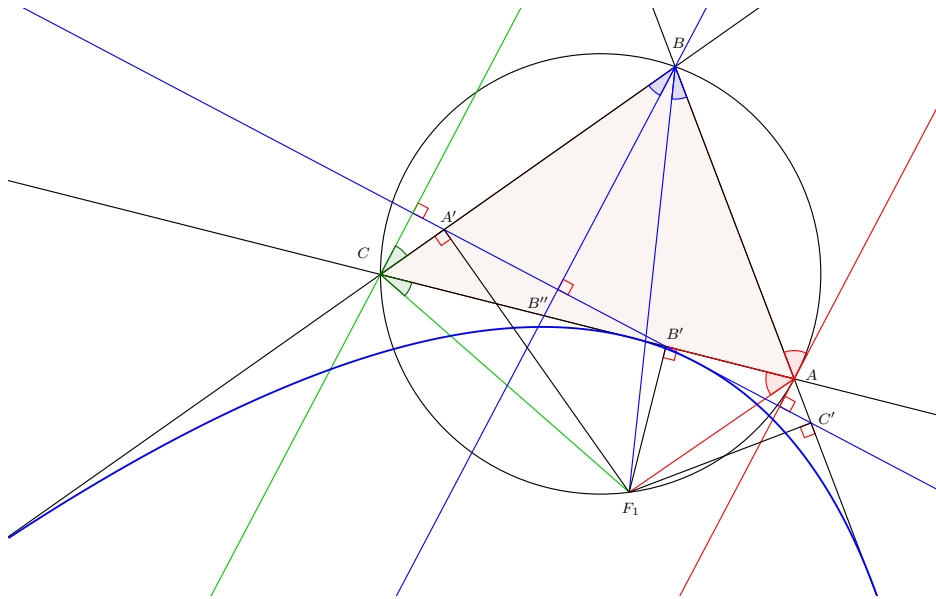


FIGURE V.17 – Droites isogonales de (F_1A) , (F_1B) et (F_1C) parallèles lorsque F_1 est sur le cercle circonscrit à ABC . Le point F_1 et le point à l'infini des trois perpendiculaires à sa droite de Simson sont conjugués isogonaux par rapport au triangle ABC .

on peut constater que lorsque les deux foyers sont dans un même demi-plan dont la frontière supporte un côté du triangle, nous obtenons une ellipse, et dans le cas contraire on obtient une hyperbole dont les foyers sont de part et d'autre des droites qui supportent les côtés du triangle. Ces affirmations peuvent se justifier plus rigoureusement à l'aide des équations cartésiennes vues en III-3 et II-3, il existe un repère dans lequel elles admettent les équations $\frac{x^2}{a^2} + \varepsilon \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$, avec $\varepsilon = 1$ pour une ellipse et $\varepsilon = -1$ pour une hyperbole. L'équation d'une droite \mathcal{T} tangente en $T(x_0; y_0)$ à cette ellipse ou hyperbole est $f(x, y) = 1$, où f est la forme linéaire telle que $f(x, y) = \frac{x_0}{a^2}x + \varepsilon \frac{y_0}{b^2}y$, cette droite partage le plan en deux demi-plans d'inéquations $f(x, y) - 1 > 0$ et $f(x, y) - 1 < 0$, ayant \mathcal{T} pour frontière commune. Les foyers de cette conique bifocale sont $F_1(c; 0)$ et $F_2(-c; 0)$, où l'on a posé $c^2 = a^2 + b^2$ pour une ellipse et $c^2 = a^2 - b^2$ pour une hyperbole. Les foyers F_1 et F_2 sont donc séparés par la frontière \mathcal{T} , si et seulement si $p = (f(c; 0) - 1)(f(-c; 0) - 1) = -\left(\frac{x_0^2 c^2}{a^4} - 1\right) < 0$,

$$\text{Pour l'hyperbole on a : } p = 1 - \frac{x_0^2(a^2 + b^2)}{a^4} = 1 - \frac{x_0^2}{a^2} - \frac{x_0^2 b^2}{a^4} = -\frac{y_0^2}{a^2} - \frac{x_0^2 b^2}{a^4} < 0$$

Des demi-plans admettant pour frontière commune une tangente à l'hyperbole contiennent chacun l'un de ses foyers.

$$\text{Pour l'ellipse on a : } p = 1 - \frac{x_0^2(a^2 - b^2)}{a^4} = 1 - \frac{x_0^2}{a^2} + \frac{x_0^2 b^2}{a^4} = \frac{y_0^2}{a^2} + \frac{x_0^2 b^2}{a^4} > 0$$

Si un demi-plan de frontière tangente à l'ellipse contient l'un de ses foyers, il contient l'autre. À partir du choix d'un premier foyer F_1 qui n'est pas sur le cercle circonscrit au triangle ABC

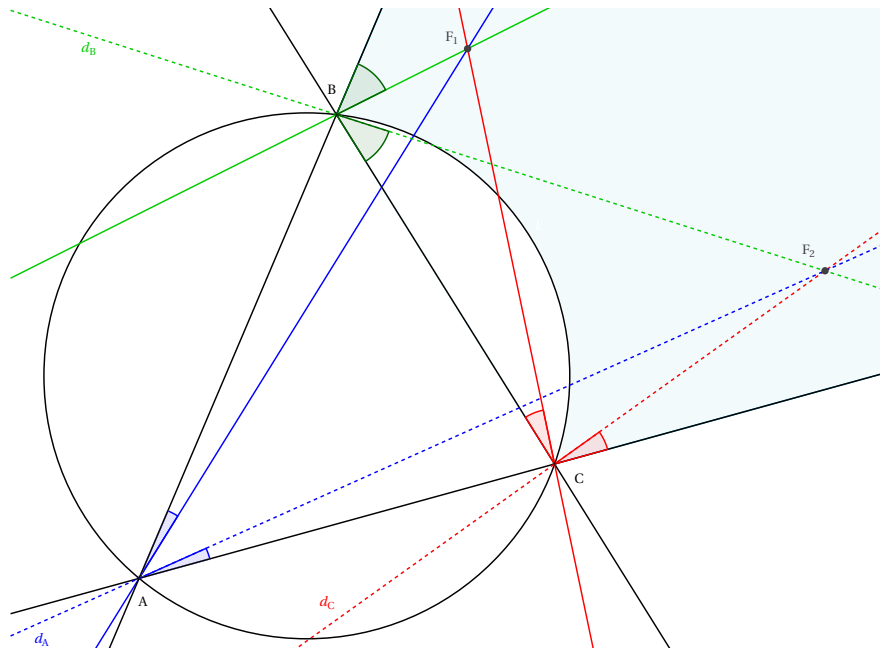


FIGURE V.20 – Si F_1 est dans \widehat{CAB} à l'extérieur de \mathcal{C} , son isogonal F_2 est dans la même région.

- l'isogonal de tout point $F_C \in (AB)$ est C
- l'isogonal de tout point $F_A \in (BC)$ est A
- l'isogonal de tout point $F_B \in (CA)$ est B

6-2 Conique tangente aux côtés d'un triangle en deux points fixés

Nous venons de voir qu'il existe une infinité de coniques tangentes à trois droites de directions différentes, en montrant que le choix arbitraire d'un foyer quelconque en dehors des cas trivialement impossibles, aboutissait à une unique solution. Mais, si on impose de plus à la conique d'être tangente en des points $A' \in [BC)$, $B' \in (CA)$ et $C' \in (AB)$ fixés à l'avance cette conique existe-t-elle toujours? Cette question ne prend de sens que si les points A' , B' et C' sont distincts des sommets du triangle ABC , de plus ils ne doivent pas être alignés, auquel cas une conique passant par ces trois points serait dégénérée en au plus deux droites. Pour espérer une réponse positive au problème posé, on ajoutera donc les hypothèses : $A \notin (BC)$, $A' \notin (B'C')$ et $\{A, B, C\} \cap \{A', B', C'\} = \emptyset$. Désignons par A'' le milieu de $[B'C']$, B'' le milieu de $[C'A']$ et C'' le milieu de $[A'B']$, les droites (AA'') , (BB'') et (CC'') doivent être concourantes ou parallèles entre elles, car si la construction d'une conique \mathcal{C} répondant au problème posé est possible, deux situations sont alors envisageables :

- \mathcal{C} est une ellipse ou une hyperbole, alors d'après le troisième théorème de Poncelet concernant ces deux types de coniques page 33 et 54, (AA'') , (BB'') et (CC'') doivent passer par le centre de \mathcal{C} ;
- \mathcal{C} est une parabole, alors d'après ce même théorème concernant ce troisième type de conique page 74, il faut que $(AA'') \parallel (BB'') \parallel (CC'')$ car ces trois droites doivent être perpendiculaires à la directrice de la parabole \mathcal{C} .

Nous excluons le cas d'une conique dégénérée qui ne peut avoir plus de deux tangentes de directions différentes.

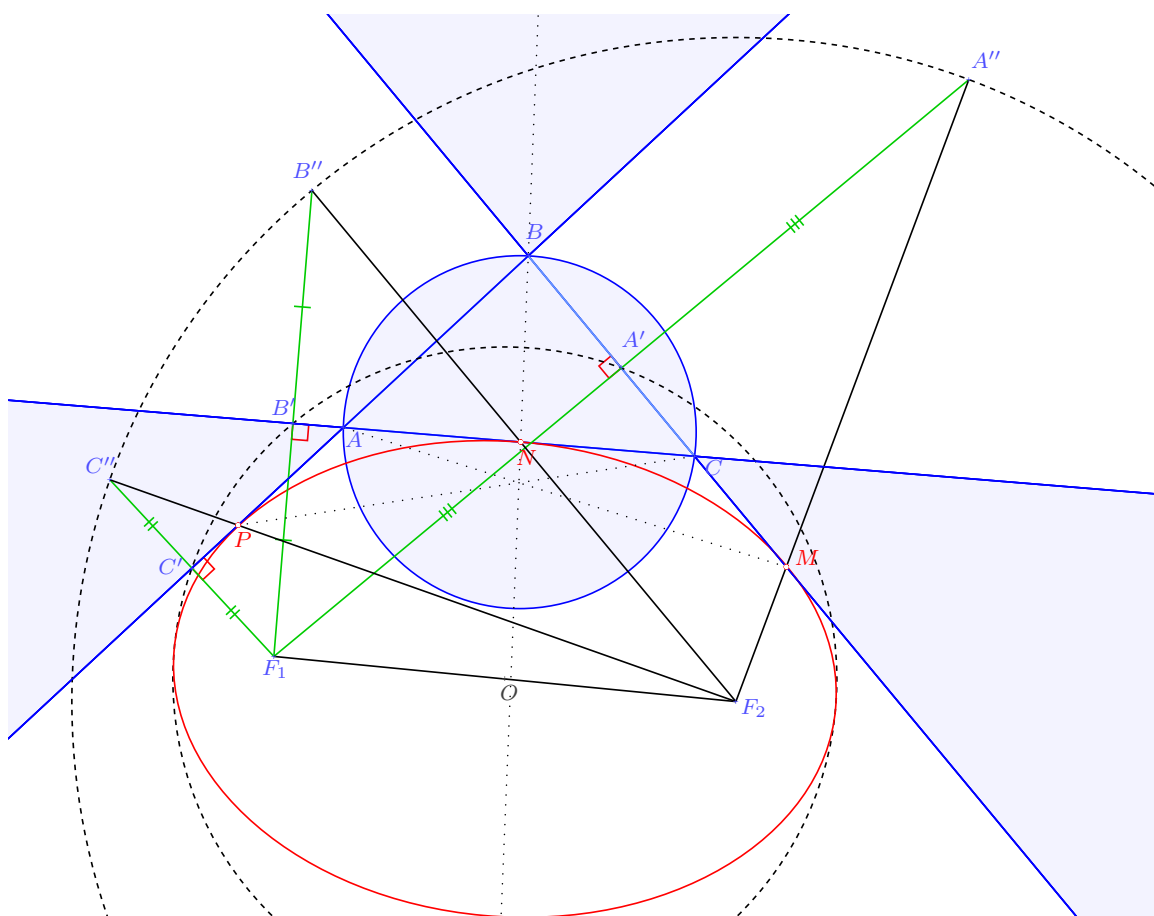


FIGURE V.21 – Ellipse exinscrite dans ABC avec foyers isogonaux hors du domaine colorié en bleu.

Nous allons montrer que pour être dans l'une des deux configurations possibles, il faut et il suffit que les points A' , B' et C' remplissent les conditions du théorème de Ceva⁷ (voir figure V.24), pour que les trois céviennes (AA') , (BB') et (CC') soient concourantes ou parallèles. En 7-3, nous étudierons le cas particulier où les céviennes en question sont les médianes du triangle, on obtiendra une ellipse admettant le centre de gravité du triangle pour centre de symétrie..

Soient les points A' , B' et C' qui admettent respectivement les coordonnées barycentriques suivantes dans le référentiel (A, B, C) :

- $(0, k, 1 - k)$ proportionnel à $(0, \overrightarrow{CA'}, \overrightarrow{A'B})$, on a $\overrightarrow{CA'} = k\overrightarrow{CB}$ et le réel k différent de 0 et 1 pour que A' ne soit pas un sommet du triangle.
- $(l, 0, 1 - l)$ proportionnel à $(\overrightarrow{B'C}, 0, \overrightarrow{AB'})$, on a $\overrightarrow{CB'} = l\overrightarrow{CA}$ et le réel l différent de 0 et 1 pour que B' ne soit pas un sommet du triangle.
- $(m, 1 - m, 0)$ proportionnel à $(\overrightarrow{BC'}, \overrightarrow{C'A}, 0)$, on a $\overrightarrow{CB'} = m\overrightarrow{CA} + (1 - m)\overrightarrow{CB}$ et le réel m différent de 0 et 1 pour que B' ne soit pas un sommet du triangle.

Les milieux A'' , B'' et C'' des côtés de $A'B'C'$ ont donc respectivement pour coordonnées⁸ $(m + l, 1 - m, 1 - l)$, $(m, 1 + k - m, 1 - k)$ et $(l, k, 2 - k - l)$, on en déduit que les droites (AA'') , (BB'') et (CC'') ont respectivement pour équations :

7. Voir ce théorème en annexe page 174

8. Voir annexe B-2-2 page 167 pour le calcul des coordonnées barycentrique d'un milieu.

$$\begin{aligned}
\bullet \text{ Droite } (AA'') : & \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ m+l & 1-m & 1-l \\ x & y & z \end{vmatrix} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (1-l)y - (1-m)z = 0 \\
\bullet \text{ Droite } (BB'') : & \quad \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ m & 1+k-m & 1-k \\ x & y & z \end{vmatrix} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (1-k)x - mz = 0 \\
\bullet \text{ Droite } (CC'') : & \quad \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ l & k & 2-k-l \\ x & y & z \end{vmatrix} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad kx - ly = 0
\end{aligned}$$

Ces trois droites sont donc concourantes ou parallèles entre elles si et seulement si

$$\begin{vmatrix} 0 & 1-l & -(1-m) \\ 1-k & 0 & -m \\ k & -l & 0 \end{vmatrix} = (1-k)l(1-m) - k(1-l)m = 0$$

En tenant compte des proportionnalités entre coordonnées barycentriques attribuées aux points A' , B' et C' , on retrouve la condition du théorème de Céva sous la forme : $\overline{A'B} \times \overline{B'C} \times \overline{C'A} = \overline{CA'} \times \overline{AB'} \times \overline{BC'}$, on doit donc avoir (AA') , (BB') et (CC') concourantes ou parallèles entre elles. Dans le cas de figure où (AA'') , (BB'') et (CC'') seraient concourantes en un point O à distance finie, si la conique recherchée existe, la solution sera nécessairement une ellipse ou une hyperbole admettant le point O pour centre de symétrie. La conique recherchée qui doit passer par A' , B' et C' , doit aussi nécessairement passer par les symétriques de ces trois points par rapport à O : $\mathcal{S}_O(A') = D$, $\mathcal{S}_O(B') = E$ et $\mathcal{S}_O(C') = F$. D'après les résultats du paragraphe V-1-3, il ne peut exister qu'une seule conique non dégénérée passant par 5 points parmi les six points de l'ensemble $\{A', B'C', D, E, F\}$; d'après le lemme suivant, quelque soit le choix des cinq points parmi les six, on aboutirait à la même solution.

LEMME 5 *Si une conique passe par les quatre sommets d'un parallélogramme, alors le centre du parallélogramme est aussi centre de symétrie de la conique.*

Ce lemme a pour corollaire, qu'une parabole ne peut être circonscrite à un parallélogramme. Soit $ABCD$ le parallélogramme de centre O dont les sommets sont sur une conique \mathcal{C} , dans le référentiel (A, B, C) , cette conique admet une équation en coordonnées barycentriques de la forme $pxy + qyz + rzx = 0$ vérifiée par le point $D = \mathcal{S}_O(B)$ de coordonnées $(1, -1, 1)$, \mathcal{C} admet donc plus précisément comme équation $pxy + qyz + (p+q)zx = 0$. Étant donné un point M de coordonnées normalisées (x_M, y_M, z_M) , son symétrique $N = \mathcal{S}_O(M)$ admet les coordonnées normalisées $(1-x_M, -y_M, 1-z_M)$, pour le vérifier, il suffit de constater que la somme des coordonnées normalisées de M et N sont des coordonnées du point O milieu de $[AC]$. On montre alors que N admet un triplet de coordonnées qui vérifie une équation de \mathcal{C} :

$$px_Ny_N + qy_Nz_N + (p+q)z_Nx_N = -p(1-x_M)y_M - qy_M(1-z_M) + (p+q)(1-z_M)(1-x_M)$$

$$px_Ny_N + qy_Nz_N + (p+q)z_Nx_N = px_My_M + qy_Mz_M + (p+q)z_Mx_M + (p+q)(1-x_M-y_M-z_M)$$

Le résultat attendu est bien nul, puisque (x_M, y_M, z_M) est un triplet de coordonnées normalisées qui vérifient l'équation de \mathcal{C} . Pour le problème qui nous concerne, si l'on sait pouvoir obtenir une conique \mathcal{C} passant par les cinq points A' , B' , C' , $\mathcal{S}_O(A') = D$ et $\mathcal{S}_O(B') = E$, étant donné que $A'B'DE$ est un parallélogramme de centre O , on est assuré que O est aussi centre de symétrie

de \mathcal{C} et que par conséquent $F = \mathcal{S}_O(C') \in \mathcal{C}$. Les figures V.22 et V.23 ont été élaborées selon ce principe à l'aide de GEOGEBRA, qui autorise le tracé direct d'une conique passant par cinq points; ces figures permettent de conjecturer que la conique passant par A', B', C', D, E et F est effectivement tangente aux côtés du triangle ABC .

Nous allons le prouver en faisant apparaître une contradiction, si on suppose qu'une fois construite la conique de centre O passant par A', B' et C' , les trois tangentes d_1, d_2 et d_3 à cette conique, respectivement en A', B' et C' , sont différentes de $(BC), (CA)$ et (AB) . Comme il ne peut y avoir plus de deux tangentes à une même conique strictement parallèles, parmi d_1, d_2 et d_3 , il y a nécessairement deux droites sécantes. Sans restreindre la généralité de notre raisonnement, on peut supposer qu'il s'agit de d_1 et d_2 qui se coupent en un point M , qui devait être différent de C pour que les trois tangentes d_1, d_2 et d_3 ne supportent pas les côtés du triangle ABC . Mais d'après le troisième théorème de Poncelet, nous devons tout de même avoir $M \in (OC'') = (OC)$ (voir figure V.24). La droite (CC'') admet $kx - ly = 0$ pour équation, puisque qu'on a supposé l non nul, on obtient tous les points de cette droite à l'aide de triplets de coordonnées proportionnels à $(x, \frac{k}{l}x, z)$ en faisant varier x et z dans \mathbb{R} . Pour $x = 0$ et $z \neq 0$ on obtient le point C , tous les autres points de (CC'') admettent des coordonnées de la forme (l, k, z') avec z' réel quelconque. Si d_1 et d_2 se coupent en un tel point $M \in (CC'') \setminus \{C\}$ de coordonnées (l, k, z_M) , nous pouvons établir des équations des droites (MA') et (MB') :

$$\text{Droite } (MA') : \begin{vmatrix} x & y & z \\ 0 & k & 1-k \\ l & k & z_M \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow k(z_M - 1 + k)x + l(1-k)y - klz = 0$$

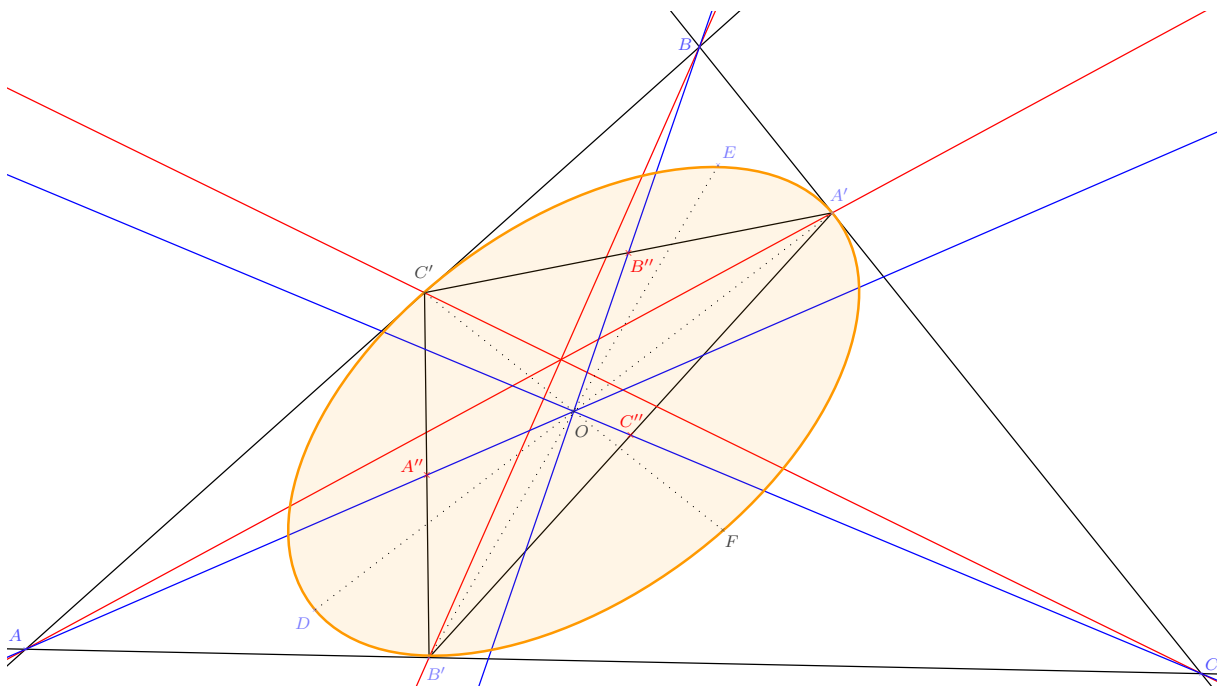


FIGURE V.22 – Construction de l'unique ellipse tangente aux droites supportant les côtés d'un triangle ABC en des points $A' \in (BC)$ et $B' \in (CA)$ fixés à l'avance

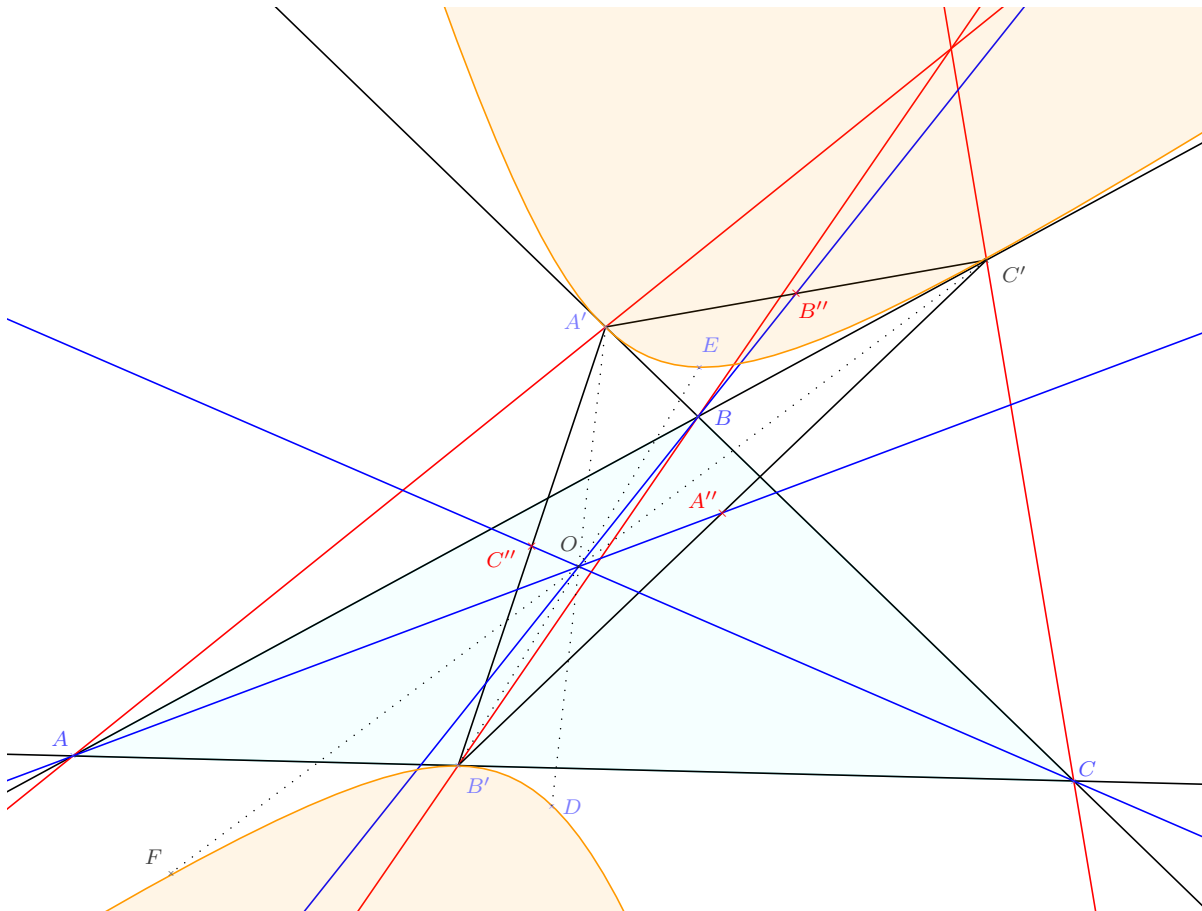


FIGURE V.23 – Construction de l'unique hyperbole tangente aux droites supportant les côtés d'un triangle ABC en des points $A' \in (BC)$ et $B' \in (CA)$ fixés à l'avance.

$$\text{Droite } (MB') : \begin{vmatrix} x & y & z \\ l & 0 & 1-l \\ l & k & z_M \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow k(1-l)x + l(z_M - 1 + l)y - klz = 0$$

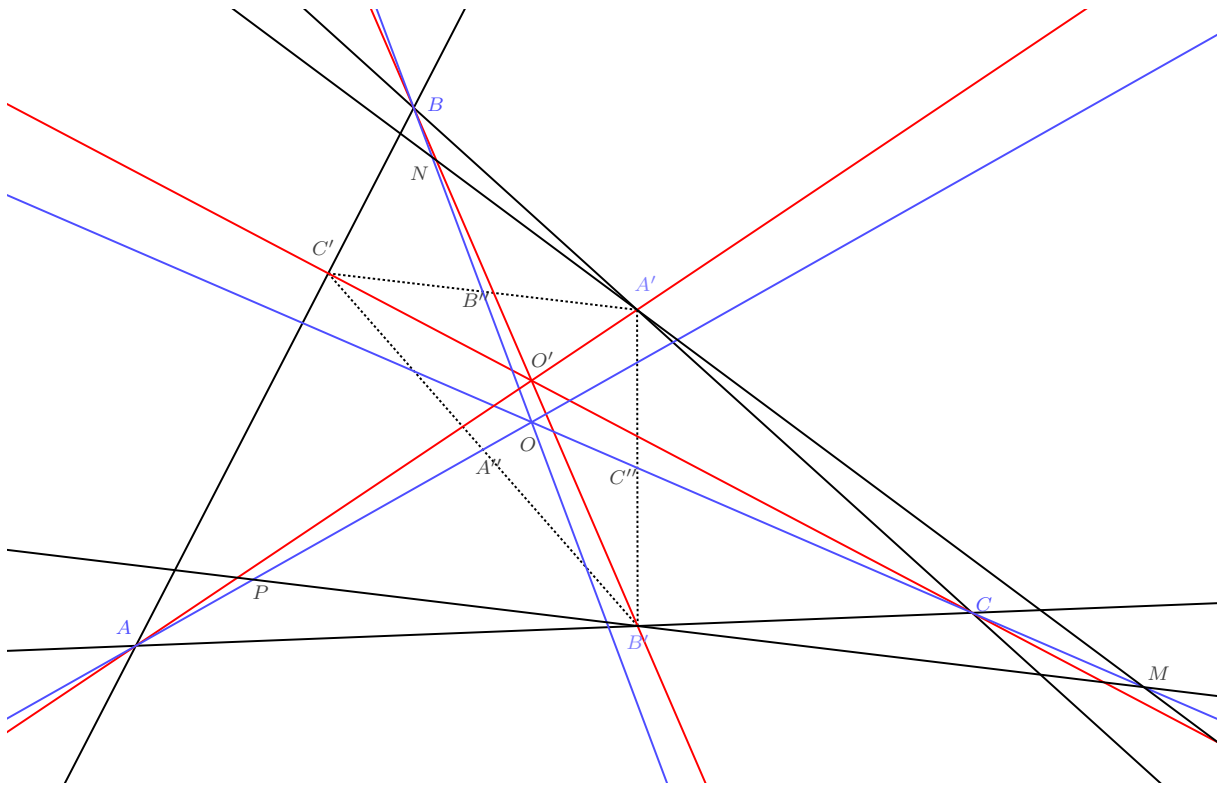
D'après le troisième théorème de Poncelet, la droite d_3 tangente à notre conique en C' doit passer par les points N et P tels que $(MA') \cap (OB) = \{N\}$ et $(MB') \cap (OA) = \{P\}$. Calculons des coordonnées du point O pour établir des équations des droites (OA) et (OB) . Le point C' et ses coordonnées $(m, 1 - m, 0)$ sont imposées par la condition de Ceva :

$$(1 - k)l(1 - m) - k(1 - l)m \Leftrightarrow m = \frac{l(1 - k)}{k + l - 2kl}$$

La droite (BB'') admet donc pour équation : $(1 - k)x - mz = 0 \Leftrightarrow (l + k - 2kl)x - lz = 0$. Le point O a des coordonnées qui doivent vérifier les équations de (CC'') et (BB'') :

$$\begin{cases} kx & - & ly & = & 0 \\ (l + k - 2kl)x & & - & lz & = & 0 \end{cases}$$

En fixant $z = k + l - 2kl$, on peut attribuer à O les coordonnées $(l, k, k + l - 2kl)$, on en déduit

FIGURE V.24 – Recherche d'une conique de centre O passant par A' , B' et C' .

des équations des droites (OA) et (OB) :

$$(OA) : \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l & k & k+l-2lk \\ x & y & z \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (k+l-2kl)y - kz = 0$$

$$(OB) : \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ l & k & k+l-2lk \\ x & y & z \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (k+l-2kl)x - lz = 0$$

L'intersection de (MA') et (OB) est un point N éventuellement à l'infini dont les coordonnées barycentriques vérifient le système :

$$\begin{cases} (k+l-2kl)x & - & lz & = & 0 \\ k(z_M-1+k)x & + & l(1-k)y & - & klz & = & 0 \end{cases}$$

Toujours en fixant $z = k+l-2kl$, on peut attribuer à N les coordonnées :

$$\left(l, \frac{kz_M - k - kl + 2k^2l}{k-1}, k+l-2kl \right)$$

L'intersection de (MB') et (OA) est un point P éventuellement à l'infini dont les coordonnées barycentriques vérifient le système :

$$\begin{cases} (k+l-2kl)y & - & kz & = & 0 \\ k(1-l)x & + & l(z_M-1+l)y & - & klz & = & 0 \end{cases}$$

En fixant une fois de plus $z = k + l - 2kl$, on peut attribuer à P les coordonnées :

$$\left(\frac{l(z_M - 1 + l) - l(k + l - 2kl)}{l - 1}, \quad k, \quad k + l - 2kl \right)$$

Pour que les points N, P et C' soient alignés comme prévu par le troisième théorème de Poncelet, il faudrait que le déterminant de leurs coordonnées barycentriques soit nul :

$$\begin{vmatrix} l(k-1) & k(l-1) & 0 \\ l & \frac{kz_M - k - kl + 2k^2l}{k-1} & k+l-2kl \\ \frac{lz_M - l - kl + 2kl^2}{l-1} & k & k+l-2kl \end{vmatrix} = 0$$

$$(k+l-2kl) [l(kz_M - k - kl + 2k^2l) - kl(k-1) - kl(l-1) + k(lz_M - l - kl + 2kl^2)] = 0$$

$$2kl(k+l-2kl)(z_M - k - l + 2kl) = 0$$

Pour que ce déterminant soit nul il faut donc que $z_M = k + l - 2kl$, autrement dit on devrait avoir $M = O$, dans ces conditions on voit géométriquement que $M = N = P = O$. Il est absurde de supposer que les tangentes à une ellipse ou une hyperbole puissent passer par son centre⁹, la seule position possible de M sur la droite (CO) est donc le point C , car on vient d'aboutir à une contradiction en lui attribuant des coordonnées barycentriques $\left(x, \frac{k}{l}x, z\right)$, avec $x \neq 0$ pour avoir $M \neq C$. Cela confirme que les tangentes en A' et B' se coupent obligatoirement en C , et que par construction, il s'en suit que côtés du triangle sont bien sur les trois tangentes à la conique en A', B' et C' .

Dans le cas de figure où les droites (AA') , (BB') et (CC') seraient parallèles comme sur la figure V.25, la conique recherchée sera nécessairement une parabole. Il ne peut exister d'ailleurs qu'une seule et unique parabole tangente à (BC) , (CA) et (AB) passant par un point $A' \in (BC)$ fixé à l'avance, car les points $B' \in (CA)$ et $C' \in (AB)$ ont un emplacement imposé si l'on souhaite obtenir $(CC'') // (BB'') // (AA'')$. Pour cela, il faut en effet que le calcul des coordonnées barycentriques du point O effectué plus haut, aboutisse à celles d'un point à l'infini, une fois k fixé la valeur de l est donc elle aussi imposée par l'équation $k+l+k+l-2kl=0 \Leftrightarrow kl=l+k$. Ce point à l'infini admet donc aussi les coordonnées $(k, l, -kl)$, on en déduit que pour un point Ω quelconque, le vecteur $\vec{u} = k\vec{\Omega A} + l\vec{\Omega B} - kl\vec{\Omega C}$ dirige nos trois droites parallèles. En choisissant $\Omega = B$ on voit que \vec{u} est colinéaire à $\vec{BA} + \vec{CB} = \vec{CA'} + \vec{BA}$, il suffit donc de construire T translaté de A' par \vec{BA} , pour obtenir un vecteur directeur de (CC'') égal à \vec{CT} . On peut ainsi construire la parabole caractérisée par les éléments suivants :

- sa directrice d , unique droite passant par l'orthocentre H du triangle, perpendiculaire à la droite (CC'') que nous venons de construire,
- son foyer F sur le cercle circonscrit au triangle, on peut l'obtenir comme point de concours des droites symétriques de d par rapport aux côtés du triangle, car les symétriques du foyer par rapport aux tangentes à la parabole doivent être sur sa directrice.

C'est à l'aide de ces éléments qu'a été construite la parabole de la figure V.25, d'après les résultats du paragraphe IV-3-4, nous savons que les droites qui supportent les côtés du triangle ABC lui sont tangentes.

9. On pourrait supposer que pour une hyperbole, ces tangentes puissent être des asymptotes tangentes à la conique en leur point à l'infini, mais nous avons supposé que les points de contacts sont à distance finie.

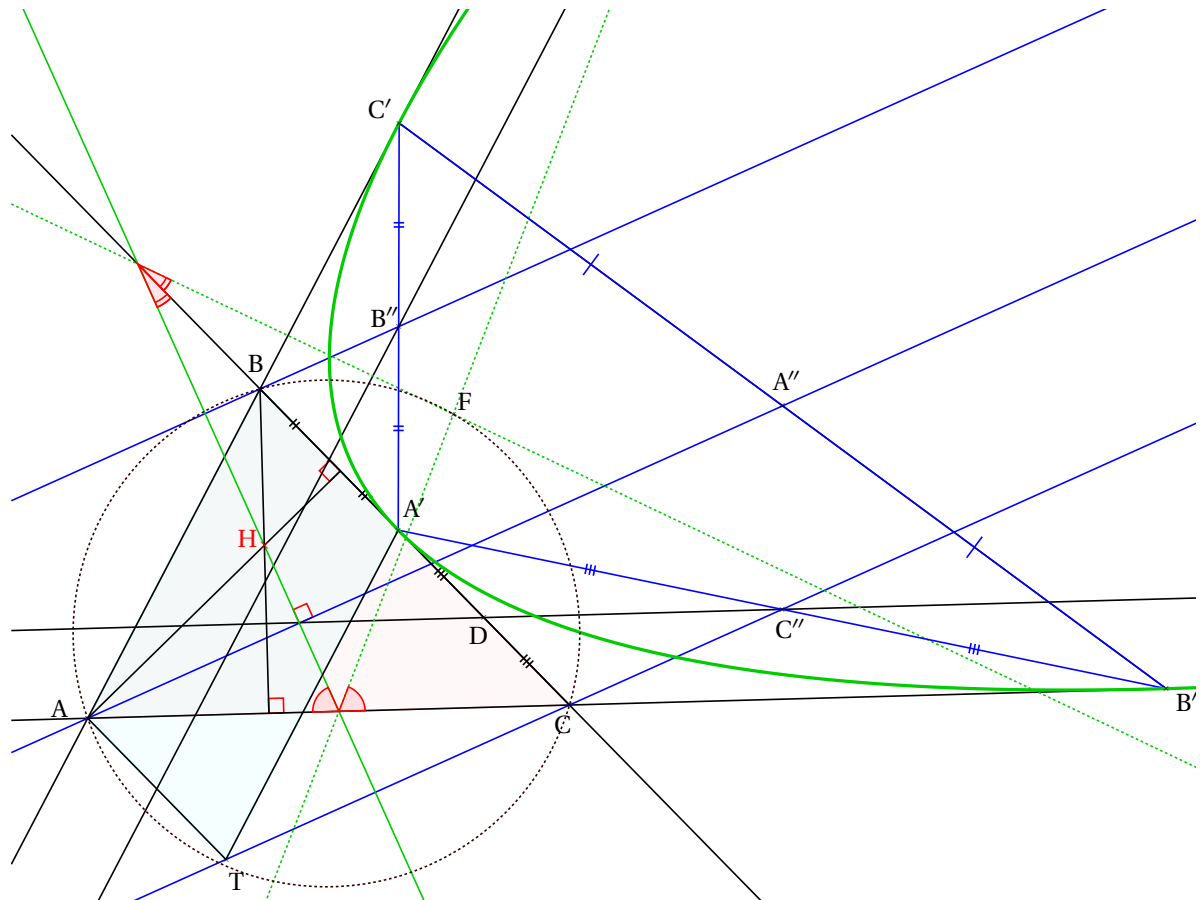


FIGURE V.25 – Construction de l'unique parabole passant par $A' \in (BC)$ fixé à l'avance, qui est de plus tangente aux trois droites supportant les côtés d'un triangle ABC ,

Pour comprendre pourquoi elle passe nécessairement par A' , B' et C' , il faut envisager une autre méthode de construction, Comme dans la situation précédente. elle ne peut être que l'unique conique passant par A' , B' , C' et les symétriques de A' et B' par rapport à l'axe parallèle à (CC'') passant par F . On peut reprendre les mêmes calculs que précédemment, mais cette fois ci le point O sera à l'infini avec les coordonnées $(k, l, -kl)$ de somme nulle. Le point $M \in (CC'') \setminus \{C\}$ de coordonnées (l, k, z_M) devrait alors être tel que $z_M = k + l - 2kl = -kl$, il devrait donc être le point à l'infini O , ce qui signifie que les tangentes en A' et B' devraient être parallèles à (CC'') , (BB'') et (AA'') . Mais pour les mêmes raisons, en cherchant à construire les tangente en A' et C' dont le point d'intersection devrait être sur (BB'') , nous trouverions une troisième tangente parallèle à (BB'') . Étant donné qu'aucune conique ne peut admettre plus de deux tangentes parallèles, il est impossible d'envisager que ces tangentes ne passent pas par B ou C .

6-3 La Conique tangente aux côtés d'un triangle avec un centre fixé

La fin du paragraphe précédent permet aussi de construire une parabole tangente aux trois côtés d'un triangle, avec un axe de symétrie de direction donnée, la directrice de cette parabole est la droite de Steiner orthogonale à la direction, fixée par avance. Nous avons vu comment construire le seul foyer F possible sur le cercle circonscrit au triangle, l'axe de la parabole ne

peut donc pas être n'importe quelle droite, mais seulement la droite passant par F ayant la direction choisie au départ.

Le problème qui consiste à construire une ellipse ou hyperbole tangente aux côtés d'un triangle, qui admet pour centre de symétrie un point O fixé à l'avance, offre plus de souplesse dans le choix du centre de symétrie. Étant donné un triangle ABC , soit O un point de coordonnées barycentriques (x_O, y_O, z_O) . Pour que O soit centre de symétrie d'une conique tangente aux droites qui supportent les côtés du triangle, une fois de plus, nous allons faire intervenir le troisième théorème de Poncelet, concernant les points de contacts de la conique avec les côtés du triangle. Désignons ces points de contacts par $A' \in (BC)$, $B' \in (CA)$ et $C' \in (AB)$, il faut alors que (AO) , (BO) et (CO) passent respectivement par les milieux de $[B'C']$, $[C'A']$ et $[A'B']$. Pour obtenir cette configuration, nous allons montrer que le point A' de coordonnées barycentriques $(0, k, 1 - k)$ a une position imposée sur (BC) . Les coordonnées de A' vont nous permettre de calculer celles de B' , pour que le milieu de $[A'B']$ soit le centre d'un parallélogramme $B'CA'D$, où D est à l'intersection de (CO) et de la parallèle à (AC) passant par A' .

Ces droites ont pour équation :

- $y_O x - x_O y = 0$
- $kx + (k - 1)y + kz = 0$

On peut le vérifier en constatant que O et C vérifient la première équation, puis que le point A' et le point à l'infini représenté par \overrightarrow{AC} de coordonnées barycentriques $(-1; 0, 1)$ vérifient la deuxième équation. Le point d'intersection de ces deux droites est donc :

$$D \text{ de coordonnées } (kx_O, ky_O, y_O - kx_O - ky_O)$$

En attribuant à C les coordonnées $(0; 0; y_O)$ de même somme que celle que nous venons d'attribuer à D , on voit que le milieu commun de $[A'B']$ et $[CD]$ est :

$$C'' \text{ de coordonnées } (kx_O, ky_O, 2y_O - kx_O - ky_O)$$

On vérifie alors que le symétrique de A' par rapport à C'' est :

$$B' \text{ de coordonnées } (kx_O, 0, y_O - kx_O)$$

car en les additionnant à $(0, ky_O, (1 - k)y_O)$ qui sont des coordonnées de A' de même somme y_O que pour B' , on retrouve celles de C'' .

De même, les coordonnées de A' permettent de calculer celles de C' , pour que le milieu de $[A'C']$ soit le centre d'un parallélogramme $C'BA'E$, où E est à l'intersection de (BO) et de la parallèle à (BA) passant par A' . Ces droites ont pour équation :

- $z_O x - x_O z = 0$
- $(k - 1)x + (k - 1)y + kz = 0$

On peut le vérifier en constatant que O et B vérifient la première équation, puis que A' et le point à l'infini représenté par \overrightarrow{AB} de coordonnées barycentriques $(-1; 1; 0)$ vérifient la deuxième équation; le point d'intersection est donc :

$$E \text{ de coordonnées } (1 - k)x_O, kz_O - (1 - k)x_O, (1 - k)z_O)$$

En attribuant à B les coordonnées $(0; z_O; 0)$ de même somme que celle que nous venons d'attribuer à E , on voit que le milieu commun de $[A'C']$ et $[BE]$ est

$$B'' \text{ de coordonnées } ((1 - k)x_O, kz_O - (1 - k)x_O + z_O, (1 - k)z_O)$$

On vérifie alors que le symétrique de A' par rapport à B'' est :

$$C' \text{ de coordonnées } ((1 - k)x_0, -(1 - k)x_0 + z_0, 0))$$

car en les additionnant à $(0, kz_0, (1 - k)z_0)$ qui sont des coordonnées de A' de même somme z_0 que pour C' , on retrouve celles de B'' .

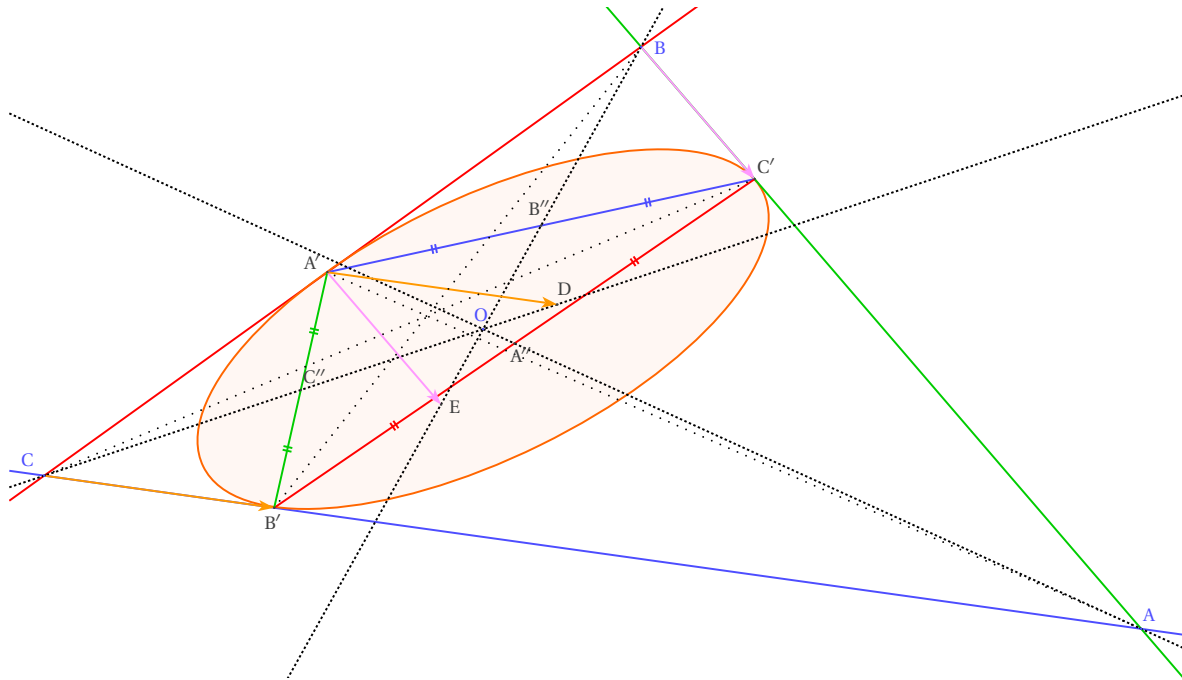


FIGURE V.26 – Construction de la conique tangente aux côtés du triangle ABC admettant un point O quelconque pour centre.

Pour obtenir des coordonnées de A'' milieu de $[B'C']$, attribuons à B' et C' les coordonnées suivantes de même somme y_0z_0 :

$$B'(kx_0z_0, 0, y_0z_0 - kx_0z_0) \quad C'((1 - k)x_0y_0, y_0z_0 - (1 - k)x_0y_0, 0)$$

Leur milieu A'' admet donc pour coordonnées :

$$(kx_0z_0 + (1 - k)x_0y_0, y_0z_0 - (1 - k)x_0y_0, y_0z_0 - kx_0z_0)$$

Le point A'' doit être sur la droite (OA) d'équation $z_0y = y_0z$, k doit donc vérifier l'équation :

$$y_0z_0^2 + (k - 1)x_0y_0z_0 = y_0^2z_0 - kx_0y_0z_0$$

$$2kx_0y_0z_0 = x_0y_0z_0 + y_0^2z_0 - y_0z_0^2$$

Pour le moment nous supposons que O n'est pas aligné avec deux sommets du triangle, ce qui se traduit par $x_0y_0z_0 \neq 0$, la position de A' sur (BC) est alors imposée par le calcul $k = \frac{x_0 + y_0 - z_0}{2x_0}$, il s'en suit que les deux autres points B' et C' ont aussi un emplacement imposé, on peut leur attribuer les coordonnées suivantes :

$$\begin{cases} A' : (0, x_0 + y_0 - z_0, x_0 - y_0 + z_0) \\ B' : (x_0 + y_0 - z_0, 0, -x_0 + y_0 + z_0) \\ C' : (x_0 - y_0 + z_0, -x_0 + y_0 + z_0, 0) \end{cases}$$

D'après l'étude faite en 6-2, nous savons que lorsque (AA'') , (BB'') et (CC'') passe par un même point O , alors (AA') , (BB') et (CC') sont concourantes ou parallèles, et que dans ces conditions il existe une unique conique de centre O tangente en A' , B' et C' aux côtés du triangle.

Lorsque le point O est sur l'un des côtés, on peut envisager d'obtenir une hyperbole qui admet comme asymptote la droite qui supporte ce côté, et qui soit tangente aux droites qui supportent les deux autres côtés. Lorsque le point O est un sommet du triangle, on peut envisager d'obtenir une hyperbole qui admet comme asymptotes, les deux droites qui supportent les côtés du triangle issus de ce sommet, et qui soit tangente à la droite qui supporte le troisième côté.

V-7 Quelques coniques célèbres

7-1 La parabole de Miquel d'un quadrilatère

Étant donné quatre droites d_1 , d_2 , d_3 et d_4 , peut-on construire une parabole tangente à ces quatre droites? Puisque nous avons vu que par un point quelconque il passe au plus deux tangentes à une parabole, parmi ces droites il ne doit pas y avoir de trio de droites concourantes. Nous avons vu aussi qu'étant donné un vecteur \vec{u} qui ne dirige pas l'axe de la parabole, celle-ci admet une unique tangente dirigée par \vec{u} , il ne peut donc y avoir aucune droite parmi d_1 , d_2 , d_3 ou d_4 parallèle à une autre.

Nous prendrons ces conditions pour hypothèses, quatre droites ainsi choisies définissent quatre triangles obtenus en excluant l'une d'entre elles, la droite exclue est nécessairement

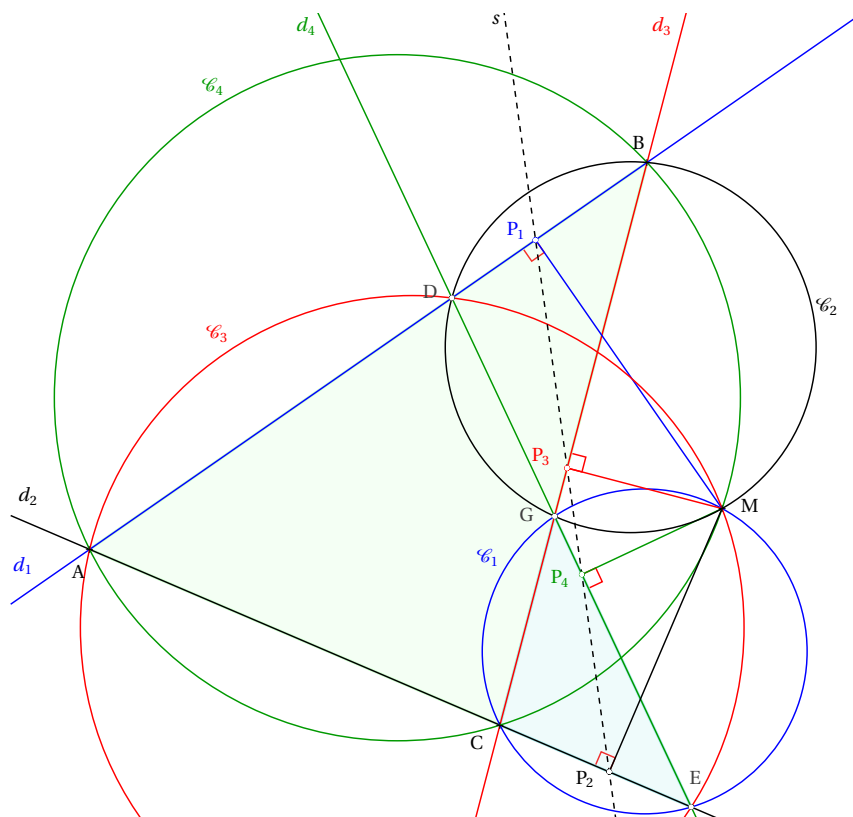


FIGURE V.27 – Point de Miquel M dont les projetés orthogonaux sur quatre droites sont alignés.

sécante aux trois autres, en des points distincts des sommets du triangle dont les côtés ont pour supports les trois droites retenues. Il nous faut donc trouver un foyer de la parabole recherchée, qui soit sur les cercles circonscrits aux quatre triangles, ce point existe-t-il ?

Soit \mathcal{C}_4 le cercle circonscrit au triangle \mathcal{T}_4 dont les côtés sont supportés par d_1 , d_2 et d_3 (triangle ABC sur la figure V.27), et \mathcal{C}_1 le cercle circonscrit au triangle \mathcal{T}_1 dont les côtés sont

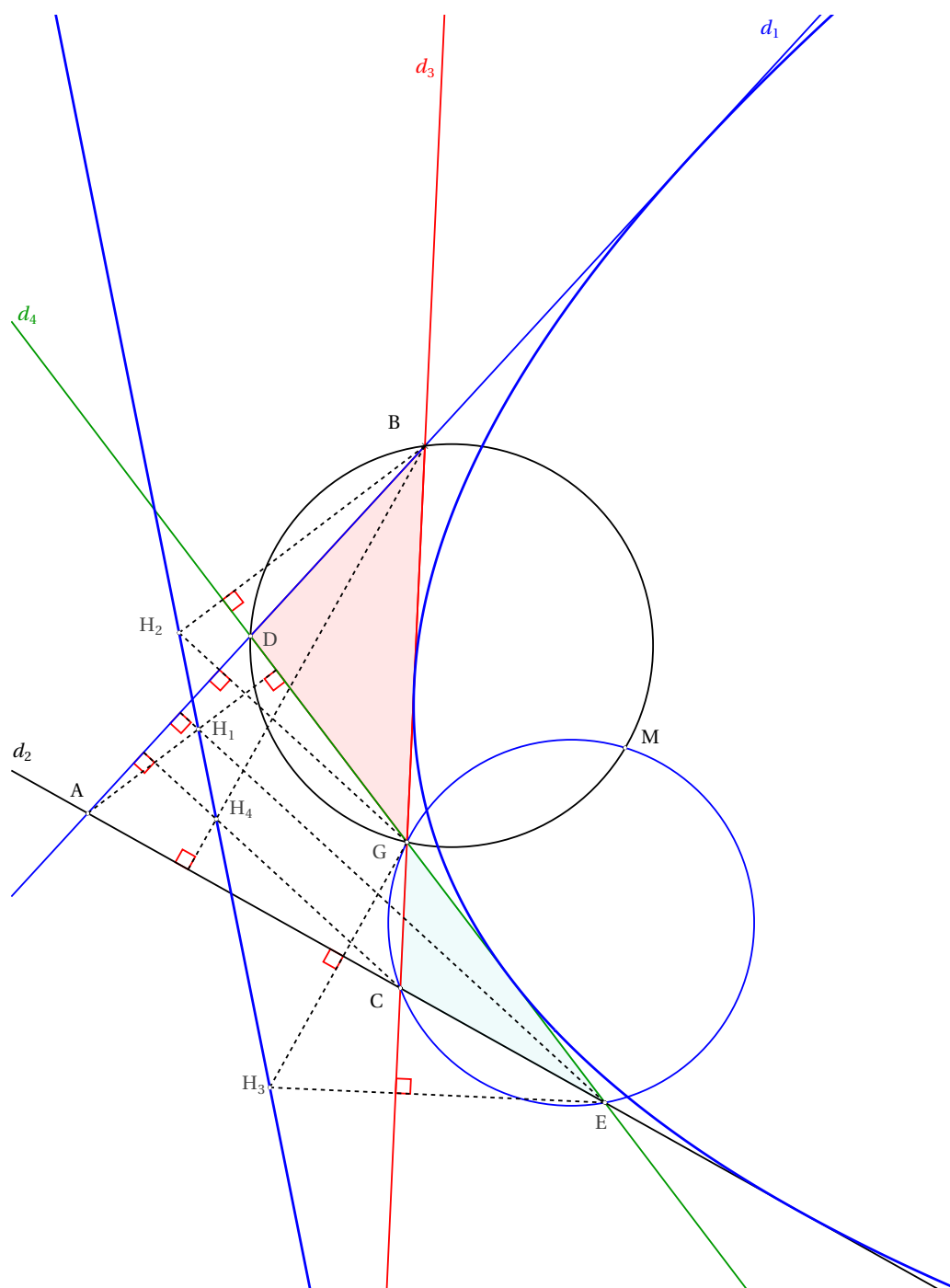


FIGURE V.28 – Construction de la parabole de Miquel, unique parabole tangente à d_1 , d_2 , d_3 et d_4 ; sa directrice passe par les 4 orthocentres H_1 , H_2 , H_3 et H_4 des triangles ADE , DBG , CGE et ABC ; son foyer M est sur les 4 cercles circonscrits à ces 4 triangles

supportés par d_2 , d_3 et d_4 (triangle CEF sur la figure V.27). Ces cercles ont le point C sur d_2 et d_3 en commun et sont distincts, sinon en considérant les points obtenus par intersection de d_2 avec les trois autres droites d_1 , d_3 et d_4 , on aboutirait à une contradiction car ces trois points distincts devraient être à la fois, cocycliques sur le même cercle \mathcal{C}_4 ou \mathcal{C}_1 , mais aussi alignés sur la droite d_2 . De plus, les cercles \mathcal{C}_4 et \mathcal{C}_1 ne peuvent pas être tangents en C , sinon ce point serait le centre d'une homothétie transformant \mathcal{C}_1 en \mathcal{C}_4 , les droites d_2 et d_3 qui se coupent au centre de cette hypothétique homothétie, recouperaient les cercles \mathcal{C}_1 et \mathcal{C}_4 en des points situés sur des droites parallèles, cela mettrait en défaut les hypothèses de départ concernant les droites d_1 , d_2 , d_3 et d_4 : sur la figure V.27, (AB) et (EF) devraient être parallèles. Les cercles \mathcal{C}_1 et \mathcal{C}_4 ont par conséquent un deuxième point M différent de C en commun, les droites de Simson de ce deuxième point relativement aux triangles \mathcal{T}_4 et \mathcal{T}_1 sont donc confondues, puisqu'elles ont en commun les projetés orthogonaux de M sur d_2 et d_3 . Ce point M est appelé point de Miquel des quatre droites d_1 , d_2 , d_3 et d_4 , d'après les conditions d'existence et la définition des droites de Simson, les quatre cercles circonscrits aux quatre triangles dont les côtés sont supportés par les quatre droites, ont nécessairement ce point en commun. Il nous permet de construire une parabole tangente à d_1 , d_2 , d_3 et d_4 , admettant pour foyer notre point M recherché, qui ne peut qu'être l'unique point dont les projetés orthogonaux sur ces quatre droites pouvaient être alignés, D'après les résultats précédents, on peut donc énoncer le théorème suivant illustré par la figure V.28.

THÉORÈME 23 (THÉORÈME DE MIQUEL) *Étant donné 4 droites d_1 , d_2 , d_3 et d_4 , il existe une parabole tangente à ces 4 droites, si et seulement si chacune des 4 droites est sécante aux 3 autres en 3 points distincts.*

Cette conique appelée parabole de Miquel des 4 droites, est l'unique parabole tangente à d_1 , d_2 , d_3 et d_4 . Son foyer M appelé point de Miquel des quatre droites, est l'unique point commun aux 4 cercles circonscrits aux 4 triangles, obtenus en choisissant 3 supports de leurs côtés parmi d_1 , d_2 , d_3 et d_4 ; la directrice de cette parabole passe par les 4 orthocentres de ces triangles.

7-2 Ellipse ou hyperbole d'Euler d'un triangle non rectangle

En établissant la définition des droites de Steiner et Simson dans un triangle page 134 en annexe A-4, on a pu constater que les symétriques de l'orthocentre par rapport aux côtés du triangle sont sur son cercle circonscrit. Si l'on construit la conique admettant O et H pour foyers, en choisissant pour cercle directeur le cercle \mathcal{C} circonscrit à ABC , il apparaît que le centre du cercle circonscrit et l'orthocentre d'un triangle sont isogonaux. et on constate de plus que cette conique est tangente aux trois côtés du triangle. Mais pour que cette construction est un sens, il faut que le foyer H ne soit pas sur le cercle directeur, il faut donc que le triangle ne soit pas rectangle. Soient les symétriques A' , B' et C' de H par rapport aux 3 côtés du triangle sont sur \mathcal{C} , il apparaît que les côtés du triangle sont portés par les médiatrices des trois segments $[HA']$, $[HB']$ et $[HC']$ (voir figure V.29). Or on a vu aux paragraphes II-2-4 et III-2-3, que les médiatrices de ces segments qui joignent un foyer à un point du cercle directeur centré sur l'autre foyer sont des tangentes à l'ellipse ou hyperbole obtenue. En application des théorèmes de Poncelet, cela confirme que O et H sont isogonaux par rapport au triangle ABC . Si H était confondu avec un sommet du triangle ABC rectangle en ce sommet, on aurait toujours cette isogonalité, mais la construction d'une conique par ce procédé est impossible. Lorsque le triangle n'est pas rectangle, on appelle ellipse ou hyperbole d'Euler la conique obtenue, on est

assurée qu'il s'agit d'une ellipse lorsque le foyer O est à l'intérieur du triangle ou bien d'une hyperbole lorsque le foyer O est à l'extérieur du triangle (voir paragraphe 6-1) L'axe focal de l'ellipse ou hyperbole d'Euler est la droite d'Euler du triangle, et puisque l'homothétisme du cercle circonscrit dans le rapport $\frac{1}{2}$ et centre H le cercle des 9 points d'Euler du triangle, celui-ci est cercle principal de cette conique.

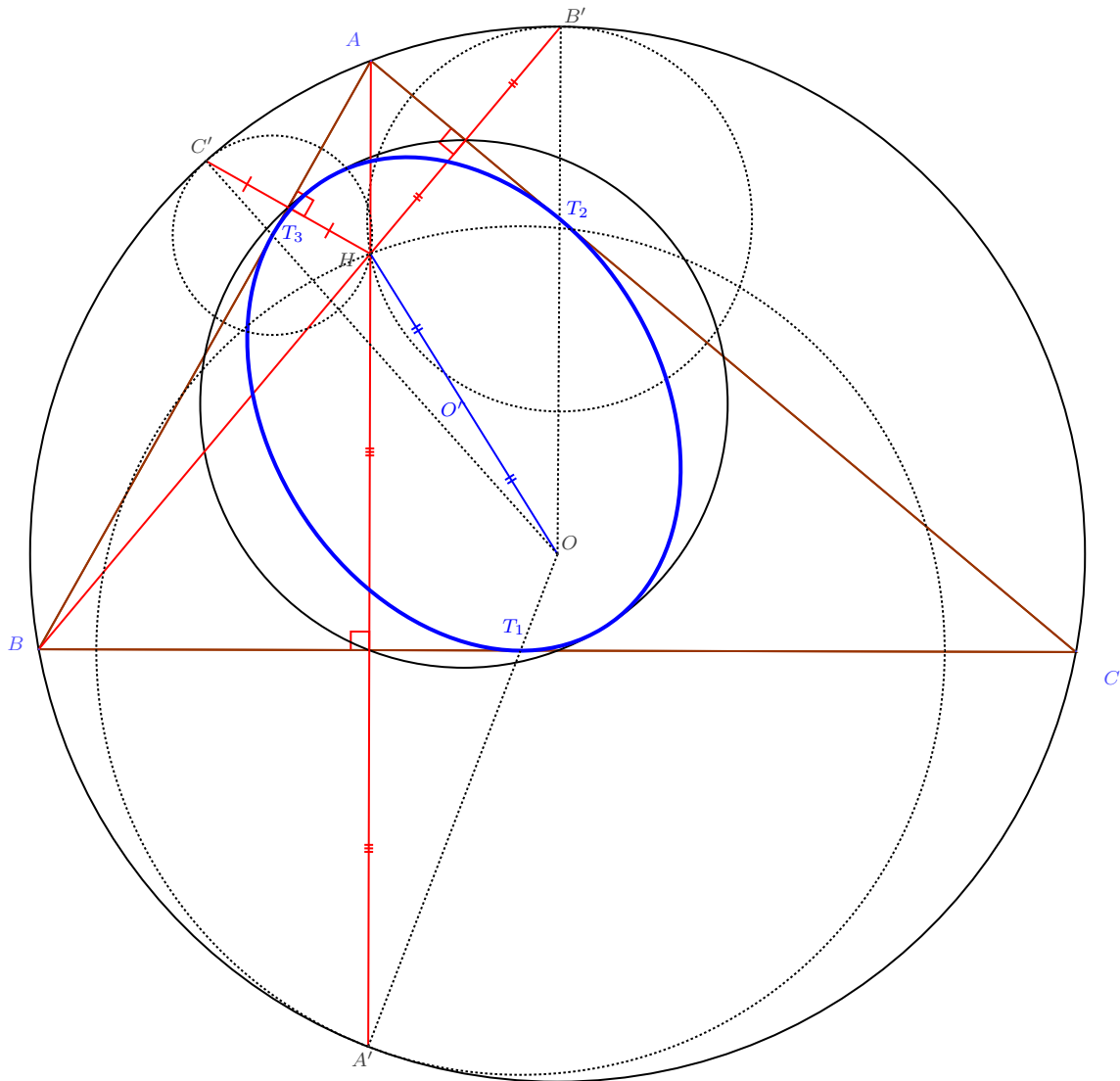


FIGURE V.29 – Ellipse d'Euler tangente aux côtés du triangle ABC , qui admet l'orthocentre H et le centre O du cercle circonscrit à l'intérieur du triangle pour foyers.

7-3 Ellipses de Steiner d'un triangle

Ellipse inscrite

La première ellipse de Steiner est une solution particulière du problème général que nous avons résolu en 6-2 en recherchant une conique tangente aux supports des côtés d'un triangle ABC en des points fixés par avance. Lorsque ces points sont les milieux A' , B' et C'

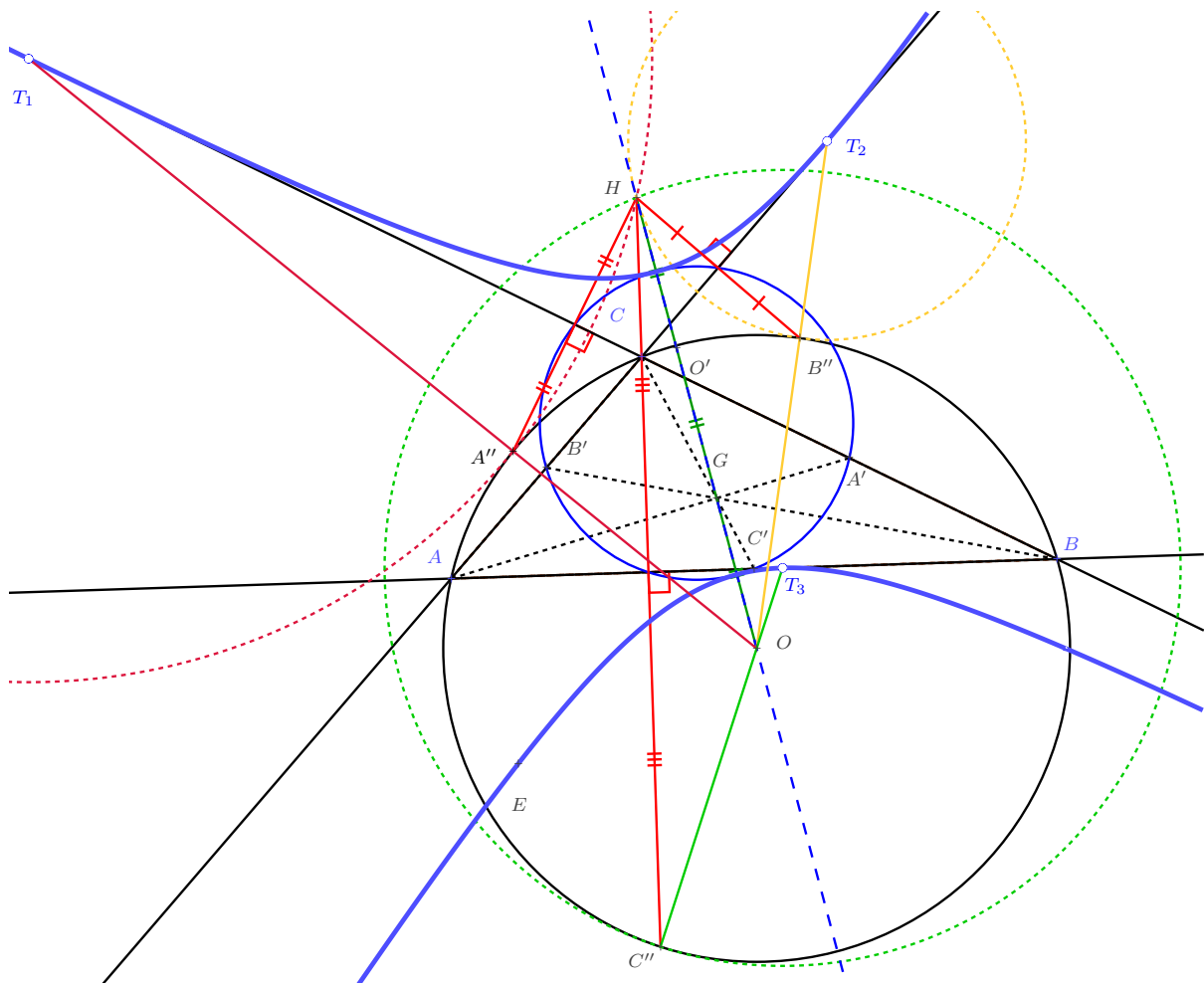
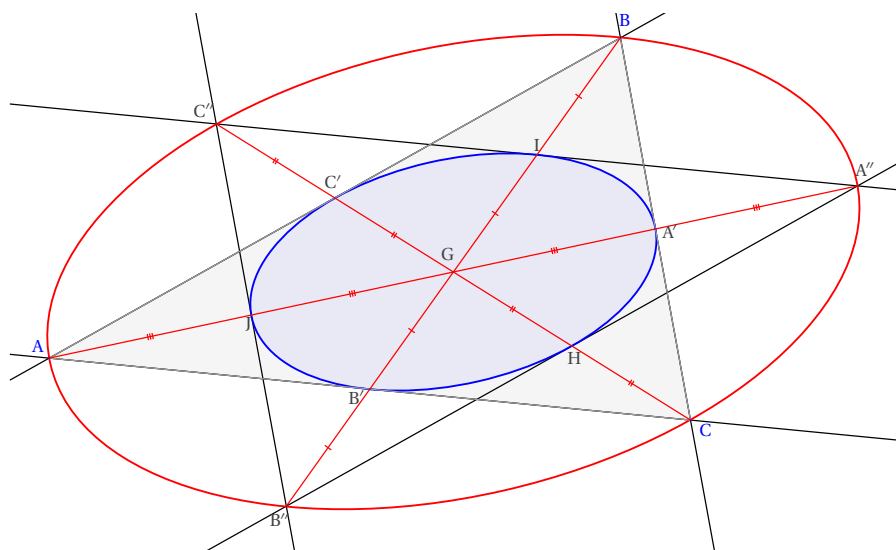


FIGURE V.30 – Hyperbole d’Euler tangente aux côtés du triangle ABC , qui admet l’orthocentre H et le centre O du cercle circonscrit à l’extérieur du triangle pour foyers.

des côtés du triangle ABC , la condition nécessaire et suffisante pour que cette conique existe est clairement remplie, puisqu’il fallait (AA') , (BB') et (CC') concourantes. En désignant par A'' , B'' et C'' les milieux respectifs de $(B'C')$, $(C'A')$ et $(A'B')$, nous avons aussi montré que les droites (AA'') , (BB'') et (CC'') devaient être concourantes, de plus leur point de concours est centre de symétrie de la conique recherchée. Dans la situation particulière à laquelle on s’intéresse ici, A'' est milieu de $[AA']$, B'' est milieu de $[BB']$ et C'' est milieu de $[CC']$, il s’en suit que les deux points de concours recherchés, coïncident tous les deux avec le centre de gravité G du triangle. La conique solution du problème posé passe donc aussi par les milieux de $[GA]$, $[GB]$ et $[GC]$, car ces points sont symétriques de A' , B' et C' par rapport à G ; tant que nous n’aurons pas montré qu’il s’agit d’une ellipse, nous l’appellerons conique de Steiner.

Ellipse circonscrite

La deuxième conique de Steiner est l’homothétique de la première dans une homothétie de centre G et rapport 2, elle est donc elle aussi de centre G et passe par les sommets du triangle. Dans le référentiel (A, B, C) , cette deuxième conique circonscrite au triangle ABC admet donc une équation barycentrique de la forme $pyz + qzx + rxy = 0$, elle doit être vérifiée par les

FIGURE V.31 – Ellipses de Steiner circonscrite et inscrite dans le triangle ABC

points de coordonnées $(-1; 2; 2)$, $(2; -1; 2)$ et $(2, 2, -1)$ qui sont les symétriques de A , B et C par rapport à G . Les coefficients (p, q, r) vérifient donc le système suivant dont on sait par avance

$$\text{qu'il aura un déterminant nul : } \begin{cases} 4p - 2q - 2r = 0 \\ -2p + 4q - 2r = 0 \\ -2p - 2q + 4r = 0 \end{cases}$$

On voit qu'il admet des solutions de la forme $p = q = r$, autrement dit la deuxième conique de Steiner admet pour équation : $yz + zx + xy = 0$. Le lemme 4 page 114, permet de dire qu'elle est conjuguée isogonale par rapport au triangle ABC , de la droite d'équation : $\frac{1}{a^2}x + \frac{1}{b^2}y + \frac{1}{c^2}z = 0$, où $a = BC$, $b = AC$ et $c = AB$. Dans le cas du triangle équilatéral avec $a = b = c$, on retrouve les équations du cercle circonscrit et la droite de l'infini.

Pour montrer que nos deux coniques homothétiques sont des ellipses, il suffit de vérifier selon les critères énoncés à la fin du paragraphe V-3, que $p^2 + q^2 + r^2 - 2pq - 2pr - 2qr$ est strictement négatif lorsqu'on remplace les coefficients p, q et r par 1. Il a été relativement simple de trouver une équation de la deuxième ellipse de Steiner dans le référentiel (A, B, C) , car elle était circonscrite à ABC . On se sert de celle-ci pour déterminer une équation moins évidente de la première ellipse de Steiner, bien qu'elle ne soit pas circonscrite à ABC . Si (x', y', z') sont des coordonnées barycentriques de M dans le référentiel (A, B, C') , pour tout point O , on a :

$$x'\overrightarrow{OA'} + y'\overrightarrow{OB'} + z'\overrightarrow{OC'} = (x' + y' + z')\overrightarrow{OM}$$

$$\frac{x'}{2}(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) + \frac{y'}{2}(\overrightarrow{GOA} + \overrightarrow{OC}) + \frac{z'}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) = (x' + y' + z')\overrightarrow{OM}$$

$$(y' + z')\overrightarrow{OA} + (x' + z')\overrightarrow{OB} + (x' + y')\overrightarrow{OC} = 2(x' + y' + z')\overrightarrow{OM}$$

Cette dernière égalité permet de voir que dans le référentiel (A, B, C) , le point M admet les coordonnées barycentriques $(x, y, z) = (y' + z', x' + z', x' + y')$, il est aisé de vérifier que $(x', y', z') = (-x + y + z, x - y + z, x + y - z)$. Par la même méthode que pour la deuxième ellipse de Steiner, on montrerait que la première ellipse de Steiner admet l'équation

$y'z' + z'x' + x'y' = 0$ dans le référentiel (A', B', C') , dans le référentiel (A, B, C) elle admet donc l'équation :

$$(x - y + z)(x + y - z) + (-x + y + z)(x + y - z) + (-x + y + z)(x - y + z) = 0$$

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2xy - 2yz - 2zx = 0$$

Nous pouvons montrer en utilisant une transformation affine de la première ellipse de Steiner en un cercle, que l'aire du domaine à l'intérieur de celle-ci, est le maximum qu'une ellipse inscrite dans ce triangle puisse contenir. Nous utiliserons pour cela l'un des deux cylindres qui passent par cette ellipse, comme nous l'avons expliqué en II-2-2 (voir figure V.32). Soit p une projection sur un plan orthogonal à l'axe de l'un de ces cylindres, parallèlement à l'axe du même cylindre.

Si \mathcal{E} est la première ellipse de Steiner du triangle ABC , étant donné qu'elle est tangente aux côtés du triangle ABC en les milieux A', B' et C' des côtés du triangle ; par la projection p , ABC est transformé en un triangle XYZ qui est équilatéral. En effet, les projetés $X' = p(A')$, $Y' = p(B')$ et $Z' = p(C')$ sont les milieux des côtés de XYZ , et l'ellipse est transformée en un cercle \mathcal{C} tangent aux côtés de XYZ en X', Y' et Z' , on a donc $XY' = Y'Z = ZX' = X'Y = YX' = X'Z$ qui prouve que $XY = YZ = ZX$. Réciproquement, si XYZ est équilatéral, son cercle inscrit passe par les milieux de ses côtés, on en déduit que les points A', B' et C' sont aussi les milieux des côtés du triangle ABC , et que \mathcal{E} a nécessairement été obtenu par projection de la première ellipse de Steiner du triangle ABC . La projection que nous utilisons pour transformer ABC en XYZ est une projection orthogonale, parallèlement à l'axe d'un cylindre dont l'angle avec le plan de l'ellipse \mathcal{E} a une mesure α , telle que $\cos \alpha$ soit égal à l'excentricité e de \mathcal{E} . Nous en

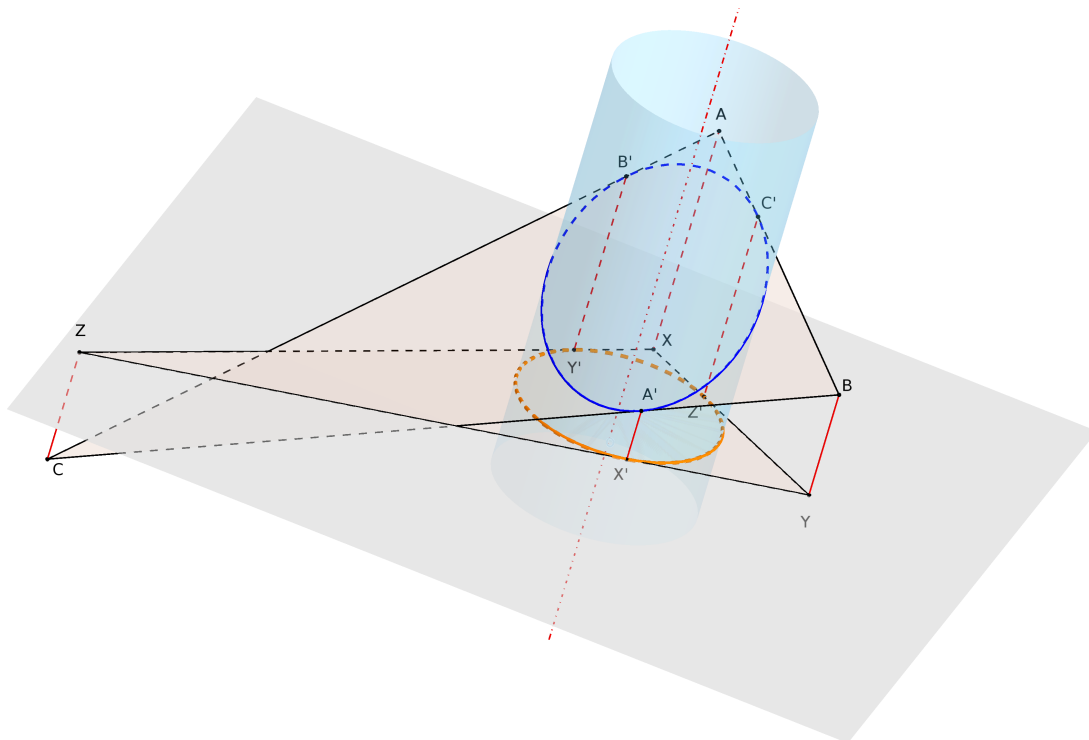


FIGURE V.32 – Projection de l'ellipse inscrite dans ABC , en le cercle inscrit dans XYZ .

en déduisons que l'angle entre le plan qui contient \mathcal{E} et celui qui contient \mathcal{C} , a une mesure β complémentaire de α telle que $\cos \beta = \sin \alpha = \sqrt{1 - e^2}$.

$$\frac{\text{Aire}(XYZ)}{\text{Aire}(ABC)} = \frac{\text{Aire}(\mathcal{E})}{\text{Aire}(\mathcal{C})} = \sqrt{1 - e^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{\text{Aire}(\mathcal{E})}{\text{Aire}(ABC)} = \frac{\text{Aire}(\mathcal{C})}{\text{Aire}(XYZ)}$$

Si \mathcal{E} est la première ellipse de Steiner du triangle ABC , étant donné que la hauteur d'un triangle équilatéral de côté a est $h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, et que le rayon de son cercle inscrit est $r = \frac{h}{3} = \frac{a\sqrt{3}}{6}$, le rapport $\frac{\text{Aire}(\mathcal{E})}{\text{Aire}(ABC)}$ est égal à $\frac{2\pi r^2}{ah} = \frac{\pi\sqrt{3}}{9}$.

Nous allons montrer que si le triangle XYZ n'est pas équilatéral, on obtient un rapport strictement inférieur, ce qui mettra en évidence que l'ellipse de Steiner est la seule qui permette d'atteindre ce rapport maximum. Utilisons les notations conventionnelles habituelles : $x = YZ$, $y = XZ$, $z = XY$ et $p = \frac{x + y + z}{2}$, de manière générale si r est le rayon du cercle inscrit dans le triangle XYZ d'aire \mathcal{A} , on a $\mathcal{A} = pr$ et d'après la formule de Héron on a $\mathcal{A} = \sqrt{p(p-x)(p-y)(p-z)}$, on en déduit $r^2 = \frac{(p-x)(p-y)(p-z)}{p}$.

$$\text{Soit } u = \frac{1}{(p-y)(p-z)}, \quad v = \frac{1}{(p-x)(p-z)}, \quad w = \frac{1}{(p-x)(p-y)},$$

$$\text{on a } u + v + w = \frac{p-x}{r^2 p} + \frac{p-y}{r^2 p} + \frac{p-z}{r^2 p} = \frac{3p - (x+y+z)}{r^2 p} = \frac{1}{r^2} \quad \text{et} \quad uvw = \frac{1}{\mathcal{A}^2 r^2}$$

Il apparait que si le rayon r du cercle \mathcal{C} est fixé, la somme $u + v + w$ est la même constante pour tout triangle XYZ dans lequel \mathcal{C} est inscrit. Parmi tous ces triangles dans lesquels un même disque est inscrit, le rapport entre l'aire de ce disque et l'aire du triangle est maximum, lorsque l'aire \mathcal{A} du triangle est minimum, c'est à dire lorsque le produit uvw est maximum. Nous allons montrer que lorsque la somme $u + v + w$ est constante, la seule manière d'atteindre ce maximum est la condition $u = v = w = \frac{1}{3r^2}$, on doit donc avoir $p - x = p - y = p - z$ et par conséquent

$x = y = z$. Seul un triangle XYZ équilatéral permet donc d'obtenir un rapport $\frac{\text{Aire}(\mathcal{E})}{\text{Aire}(XYZ)}$,

qui puisse prendre la valeur maximum possible $\frac{\pi}{\sqrt{27}}$. Pour prouver ces dernières affirmations,

considérons un triplet $(u, v, w) \in]0; +\infty[\times]0; +\infty[\times]0; +\infty[$ tel que $u + v + w = k$. Si $u = v = w$ on a évidemment $uvw = \frac{k^3}{27}$, sinon si les composantes du triplet ne sont pas toutes égales,

étant donné que la fonction \ln qui a pour dérivée seconde $\ln'' :]0; +\infty[\rightarrow]-\infty; 0[$,
 $x \mapsto -\frac{1}{x^2}$

est strictement concave, on établit les inégalités strictes :

$$\ln \frac{u+v+w}{3} > \frac{\ln u + \ln v + \ln w}{3} \quad \Rightarrow \quad 3 \ln \frac{k}{3} > \ln(uvw) \quad \Rightarrow \quad \frac{k^3}{27} > uvw$$

On montre aussi par un procédé semblable, que la deuxième ellipse de Steiner d'un triangle est celle d'aire minimale, parmi toutes les ellipses circonscrites au triangle. Si ABC est un triangle inscrit dans une ellipse \mathcal{E} , comme précédemment, on utilise une projection p telle que $p(\mathcal{E})$ soit

un cercle \mathcal{C} , $p(A) = X$, $p(B) = Y$ et $p(C) = Z$, on a toujours l'égalité $\frac{\text{Aire}(\mathcal{E})}{\text{Aire}(ABC)} = \frac{\text{Aire}(\mathcal{C})}{\text{Aire}(XYZ)}$. Nous allons montrer que pour un cercle \mathcal{C} fixé, ce rapport est minimum lorsque le triangle XYZ inscrit dans le cercle est équilatéral. Dans ces conditions, le centre O du cercle est aussi centre de gravité du triangle, et puisque toute application affine conserve les barycentres, si G est centre de gravité de MNP on a $p(G) = O$. Mais puisque les projections conservent aussi les milieux, G est aussi centre de symétrie de l'ellipse \mathcal{E} , celle-ci est donc bien l'unique ellipse passant par les trois sommets du triangle MNP et leurs symétriques par rapport à G . D'après la relation des sinus dans un triangle, Le cercle circonscrit du triangle XYZ a pour diamètre $d = \frac{x}{\sin \hat{X}} = \frac{y}{\sin \hat{Y}} = \frac{z}{\sin \hat{Z}}$, l'aire de triangle XYZ est donc $\frac{1}{2}xy\sin \hat{Z} = \frac{1}{2}d^2 \sin \hat{X} \sin \hat{Y} \sin \hat{Z}$. Le diamètre d du cercle circonscrit étant fixé, le rapport $\frac{\text{Aire}(\mathcal{E})}{\text{Aire}(XYZ)}$ est minimum, lorsque $\sin \hat{X} \sin \hat{Y} \sin \hat{Z}$ est maximum. Or la fonction $\ln \circ \sin$ est strictement concave sur l'intervalle $I =]0; \pi[$, car sa dérivée seconde est $-\frac{1}{\cos^2}$ qui est strictement négative sur I , puisque $\hat{X} + \hat{Y} + \hat{Z} = \pi$, on en déduit l'inégalité :

$$3 \ln \left(\sin \frac{\hat{X} + \hat{Y} + \hat{Z}}{3} \right) = \ln \frac{3\sqrt{3}}{2} \geq \ln (\sin \hat{X}) + \ln (\sin \hat{Y}) + \ln (\sin \hat{Z})$$

En passant aux exponentiels, on obtient $\frac{3\sqrt{3}}{2} \geq \sin \hat{X} \sin \hat{Y} \sin \hat{Z}$, $\ln \circ \sin$ étant strictement concave l'égalité à lieu si et seulement si $\hat{X} = \hat{Y} = \hat{Z} = \frac{\pi}{3}$, autrement dit lorsque le triangle XYZ est équilatéral.

7-4 Hyperbole de Kiepert dans un triangle

Étant donné un triangle quelconque ABC , considérons un triangle isocèle ABC' , puis construisons les triangles $AB'C$ et $A'BC$ semblables à ABC' , tels qu'on ait les égalités entre angles orientés ci-dessous illustrées par les figures V.33 et V.34.

$$\left[\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB'} \right] = \left[\overrightarrow{AC'}, \overrightarrow{AB} \right] = \left[\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC'} \right] = \left[\overrightarrow{BA'}, \overrightarrow{BC} \right] = \left[\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CA'} \right] = \left[\overrightarrow{CB'}, \overrightarrow{CA} \right]$$

On supposera tous ces angles de même mesure $\theta \in]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$, cette situation apparait comme un cas particulier, auquel on peut appliquer le théorème de Jacobi redémontré en annexe A-5 à la page 158, il permet d'affirmer que (AA') , (BB') et (CC') sont trois droites concourantes en un point $K(\theta)$ ¹⁰.

Si le triangle est équilatéral, le point de concours K se situe toujours sur le centre de gravité du triangle, si celui-ci est seulement isocèle sans être équilatéral, K est nécessairement sur la médiatrice de la base de ce triangle. Lorsque le triangle n'est pas isocèle, nous allons montrer que lorsque C' parcourt la médiatrice de $[AB]$, ce qui revient à faire varier θ dans $]-\frac{\pi}{2}; 0[\cup]0; \frac{\pi}{2}[$, l'ensemble des points $K(\theta)$ sont sur une **hyperbole équilatère**. En associant le centre de

10. Les cercles circonscrits à ABB'' , BCC'' et CAA'' non tracés sur la figure, passent respectivement par A'' , B'' et C'' , car ce sont 3 cercles sous lesquels (A, B) , (B, C) et (C, A) sont vus sous un angle de mesure θ modulo π , K est donc le centre radical de ces cercles; voir annexe A-5 pour la définition du centre radical de trois cercles.

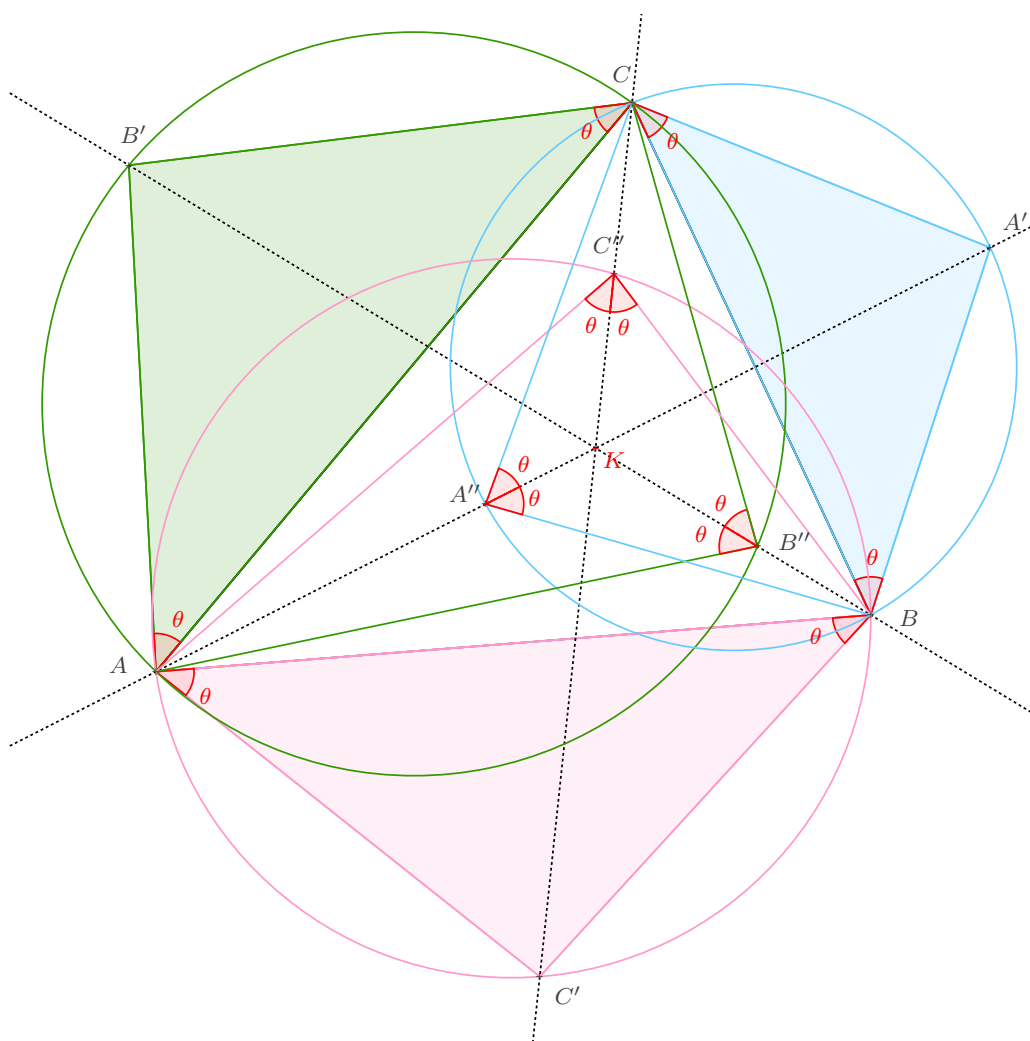


FIGURE V.33 – Lorsque les 3 triangles isocèles de couleurs sont semblables, (AA') , (BB') et (CC') sont concourantes.

gravité du triangle à $\theta = 0$ et son orthocentre à $\theta = \pm \frac{\pi}{2}$, toute cette hyperbole peut être mise en bijection avec $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, Il s'agit de l'**hyperbole de Kiepert** représentée sur la figure V.34, elle passe par les trois sommets, le centre de gravité du triangle et son orthocentre, ces deux derniers points peuvent être envisagés comme des cas limites, lorsque $\theta \rightarrow 0$ et que C' doit être placé au milieu de $[AB]$, ou lorsque $\theta \rightarrow \pm \frac{\pi}{2}$ et que C' est rejeté à l'infini. Nous allons montrer que $K(\theta)$ décrit l'image d'une droite par conjugaison isogonale par rapport au triangle ABC , nous aurons besoin de rechercher les coordonnées barycentriques de K en fonction de θ . Le calcul des coordonnées de $K(\theta)$ nous amènera à constater que les droites (AA') , (BB') et (CC') sont effectivement concourantes, dans cette situation particulière il n'est donc pas nécessaire d'évoquer le théorème de Jacobi pour le prouver.

A' est le barycentre de (A, α) , (B, β) et (C, γ) où α , β et γ sont les aires algébriques des triangles $A'BC$, $AA'C$ et ABA' affectées d'un signe, selon l'orientation du triangle¹¹. En utilisant

11. Voir annexe B page 170 pour exprimer des coordonnées barycentriques à partir d'aires de triangles orientés.

les conventions habituelles pour noter les six réels **positifs** suivants :

$$a = BC, b = AC, c = AB, \hat{A} = \left| \left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC} \right] \right|, \hat{B} = \left| \left[\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC} \right] \right| \text{ et } \hat{C} = \left| \left[\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB} \right] \right|$$

Les valeurs absolues de ces aires sont obtenues en multipliant les valeurs absolues de $a \sin \theta$, $b \sin(\theta + \hat{C})$, $c \sin(\theta + \hat{B})$ par $\frac{BA'}{2} = \frac{CA'}{2}$. On peut donc affirmer que A' est barycentre de $(A, -a \sin \theta)$, $(B, b \sin(\hat{C} + \theta))$ et $(C, c \sin(\hat{B} + \theta))$, et que la droite projective (AA') admet pour équation en coordonnées barycentriques¹² dans le référentiel (A, B, C) :

$$\begin{vmatrix} -a \sin \theta & b \sin(\hat{C} + \theta) & c \sin(\hat{B} + \theta) \\ 1 & 0 & 0 \\ x & y & z \end{vmatrix} = 0, \text{ soit :}$$

$$c y \sin(\theta + \hat{B}) - b z \sin(\theta + \hat{C}) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -a c y \sin(\theta + \hat{B}) + a b z \sin(\theta + \hat{C}) = 0$$

En échangeant les rôles des points A, B et C , on obtient des équations barycentriques de (BB') :

$$c x \sin(\theta + \hat{A}) - a z \sin(\theta + \hat{C}) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad b c x \sin(\theta + \hat{A}) - a b z \sin(\theta + \hat{C}) = 0$$

puis des équations barycentriques de (CC') :

$$b x \sin(\theta + \hat{A}) - a y \sin(\theta + \hat{B}) z = 0 \quad \Leftrightarrow \quad b c x \sin(\theta + \hat{A}) - a c y \sin(\theta + \hat{B}) z = 0$$

On obtient un système de 3 équations non indépendantes, car la troisième peut s'obtenir par addition membres à membres d'équations équivalentes aux deux premières, ceci aurait pu être vérifié en montrant que le déterminant du système de 3 équations était nul. On en déduit que notre système admet des solutions différentes de $(0, 0, 0)$, ce qui confirme que les droites (AA') , (BB') et (CC') ont en commun un point $K(\theta)$.

- Si $\hat{A} \neq -\theta$, $\hat{B} \neq -\theta$ et $\hat{C} \neq -\theta$, en fixant $z \neq 0$ arbitrairement, on peut attribuer à $K(\theta)$ les

$$\text{coordonnées} \left(\frac{a z \sin(\theta + \hat{C})}{c \sin(\theta + \hat{A})}, \frac{b z \sin(\theta + \hat{C})}{c \sin(\theta + \hat{B})}, z \right)$$

- Lorsque θ est opposé à la mesure de l'un des angles d'un triangle ABC non équilatéral, alors $K(\theta)$ est le sommet de cet angle, par exemple, si $\theta = -\hat{A}$, $(CC') = (AC)$ et $(BB') = (AB)$, on a donc $K(-\hat{A}) = A$, de même $K(-\hat{B}) = B$ et $K(-\hat{C}) = C$.

Quelque soit l'une des deux situations ci-dessus, $K(\theta)$ peut être obtenu pour tout $\theta \in \left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[$, comme point de coordonnées barycentriques :

$$(a \sin(\theta + \hat{B}) \sin(\theta + \hat{C}), b \sin(\theta + \hat{A}) \sin(\theta + \hat{C}), c \sin(\theta + \hat{A}) \sin(\theta + \hat{B}))$$

En excluant le cas trop particulier du triangle équilatéral, lorsque θ prend les valeurs $-\hat{A}$, $-\hat{B}$ et $-\hat{C}$, on obtient les sommets A, B et C , ceci explique pourquoi le lieu de $K(\theta)$ passe par les trois sommets du triangle. En appliquant les formules $(x', y', z') = \left(\frac{a^2}{yz}, \frac{b^2}{xz}, \frac{c^2}{xy} \right)$ établies au

12. Voir en annexe B comment sont attribués les signes aux coordonnées barycentriques page 170, et comment exprimer une équation de droite en coordonnées barycentriques page 168.

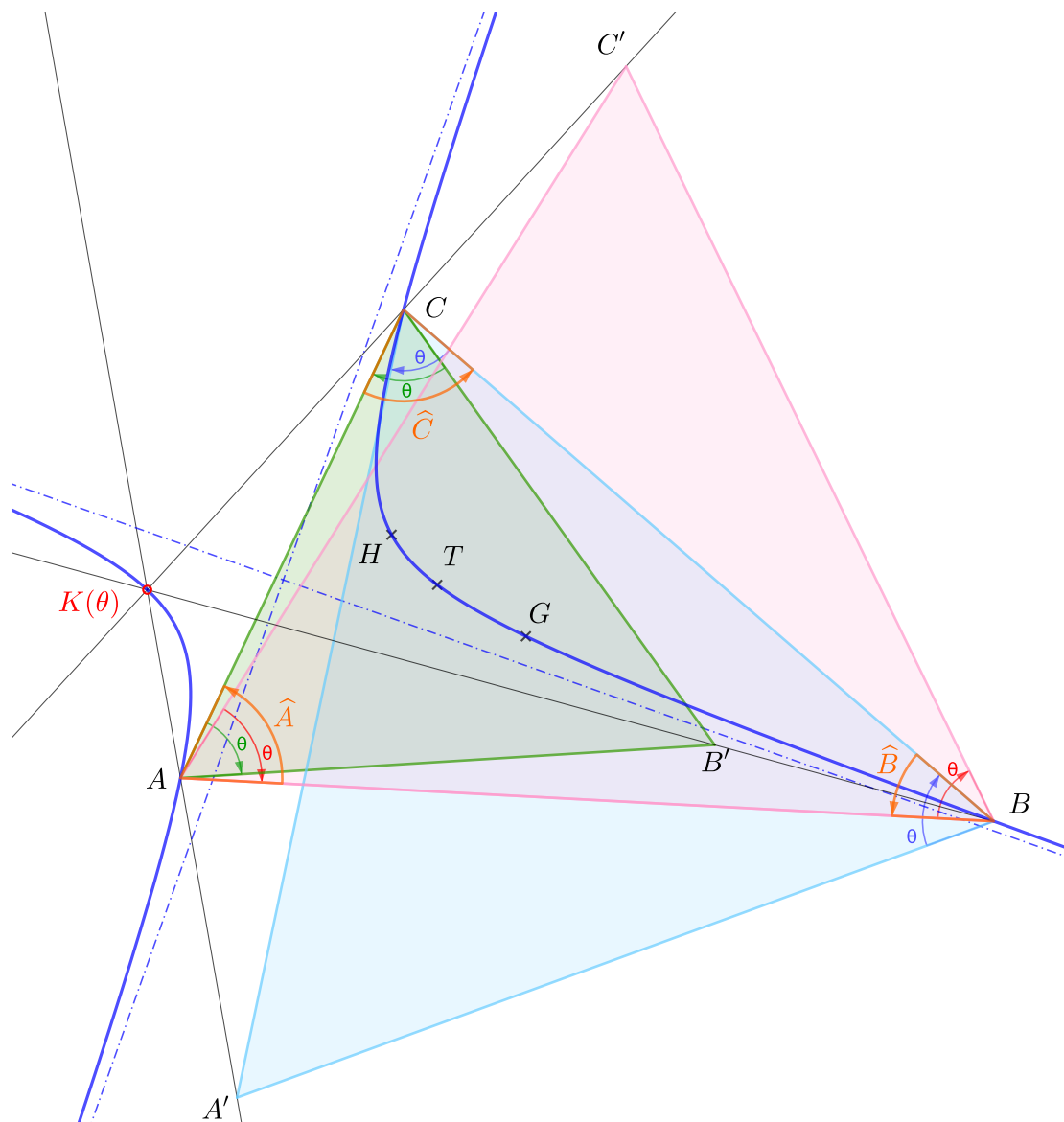


FIGURE V.34 – Hyperbole de Kiepert du triangle ABC non isocèle passant par ses trois sommets, son centre de gravité, sont l'orthocentre et le point de Toricelli obtenu pour $\theta = \frac{\pi}{3}$.

paragraphe V-5-3, on voit que point $K[\theta]$ est conjugué isogonal par rapport au triangle ABC , du point $K'(\theta)$ de coordonnées barycentriques :

$$(x(\theta), y(\theta), z(\theta)) = (a \sin(\theta + \hat{A}), b \sin(\theta + \hat{B}), c \sin(\theta + \hat{C}))$$

En utilisant l'identité $\cos(p - q) - \cos(p + q) = 2 \sin p \sin q$, nous allons montrer que la somme suivante est nulle :

$$S = \frac{\sin(\hat{B} - \hat{C})}{a} x(\theta) + \frac{\sin(\hat{C} - \hat{A})}{b} y(\theta) + \frac{\sin(\hat{A} - \hat{B})}{c} z(\theta)$$

$$S = \sin(\theta + \hat{A}) \sin(\hat{B} - \hat{C}) + \sin(\theta + \hat{B}) \sin(\hat{C} - \hat{A}) + \sin(\theta + \hat{C}) \sin(\hat{A} - \hat{B})$$

En transformant ces produits en somme, on obtient :

$$2S = \cos(\theta + \hat{A} - \hat{B} + \hat{C}) - \cos(\theta + \hat{A} + \hat{B} - \hat{C}) + \\ \cos(\theta + \hat{A} + \hat{B} - \hat{C}) - \cos(\theta - \hat{A} + \hat{B} + \hat{C}) + \cos(\theta - \hat{A} + \hat{B} + \hat{C}) - \cos(\theta + \hat{A} - \hat{B} + \hat{C})$$

Quelque soit θ , les termes de cette somme s'annulent deux à deux. En posant $\alpha = \frac{\sin(\hat{B} - \hat{C})}{a}$, $\beta = \frac{\sin(\hat{C} - \hat{A})}{b}$, $\gamma = \frac{\sin(\hat{A} - \hat{B})}{c}$, il apparait donc que les coordonnées du conjugué isogonal de $K(\theta)$ vérifient l'équation $\alpha x + \beta y + \gamma z = 0$ qui est celle d'une droite. D'après le théorème 22 page 112, le lieu de $K(\theta)$ est donc inclus dans une conique, on peut préciser que cette conique est une hyperbole équilatère, car la droite dont elle est image passe par le centre O du cercle circonscrit. En effet si la construction géométrique de $K(\theta)$ n'est pas envisageable de manière classique pour $\theta = \frac{\pi}{2}$, la définition de son conjugué $K'(\theta)$ par coordonnées barycentriques ci dessus, est prolongeable pour $\theta \in \left\{-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right\}$. En utilisant la relation des sinus dans un triangle qui permet d'exprimer le diamètre du cercle circonscrit à ABC sous la forme $d = \frac{a}{\sin \hat{A}} = \frac{b}{\sin \hat{B}} = \frac{c}{\sin \hat{C}}$, on obtient pour $K'\left(\frac{\pi}{2}\right)$, les coordonnées équivalentes suivantes :

$$(\sin \hat{A} \cos \hat{A}, \sin \hat{B} \cos \hat{B}, \sin \hat{C} \cos \hat{C}) \quad \text{ou} \quad (\sin 2\hat{A}, b \sin 2\hat{B}, c \sin 2\hat{C})$$

Il est assez simple de voir qu'il s'agit de coordonnées qui sont celles du centre O du cercle circonscrit à ABC , car en considérant que ABC est orienté positivement, les triangles OBC , AOC et ABO ont des aires algébriques positives respectivement égales à $\frac{r^2}{2} \sin 2\hat{A}$, $\frac{r^2}{2} \sin 2\hat{B}$ et $\frac{r^2}{2} \sin 2\hat{C}$, donc proportionnelles aux coordonnées que nous venons de calculer. En étudiant l'ellipse d'Euler dans le paragraphe 7-2, on a montré que le centre du cercle circonscrit O et l'orthocentre H étaient isogonaux par rapport à ce triangle, cela confirme que le lieu que nous recherchons est inclus dans une hyperbole équilatère qui passe par l'orthocentre H .

En fait cette inclusion est une égalité, car tous les points de cette hyperbole, ceux à l'infini inclus sont images par conjugaison isogonale d'un unique point de la droite projective \mathcal{D} d'équation $\frac{\sin(\hat{B} - \hat{C})}{a}x + \frac{\sin(\hat{C} - \hat{A})}{b}y + \frac{\sin(\hat{A} - \hat{B})}{c}z = 0$. Tout point de cette droite a des coordonnées qui peuvent être exprimées sous la forme $(a \sin(\theta + \hat{A}), b \sin(\theta + \hat{B}), c \sin(\theta + \hat{C}))$ pour un réel $\theta \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, on vérifie en effet qu'un point $K'(\theta)$ qui admet ces coordonnées, parcourt toute une droite en réécrivant ses coordonnées sous la forme d'une combinaison linéaire de deux triplets constants :

$$\cos \theta (a \sin \hat{A}, b \sin \hat{B}, c \sin \hat{C}) + \sin \theta (a \cos \hat{A}, b \cos \hat{B}, c \cos \hat{C})$$

Soit $G' = K'(0)$ de coordonnées $(a \sin \hat{A}, b \sin \hat{B}, c \sin \hat{C})$, son conjugué admet pour coordonnées $\left(\frac{a}{\sin \hat{A}}, \frac{b}{\sin \hat{B}}, \frac{c}{\sin \hat{C}}\right)$, on retrouve ainsi le centre de gravité de ABC , puisque l'on a obtenu trois coordonnées barycentriques égales au diamètre du cercle circonscrit à ABC . On

retrouve aussi $K' \left(\frac{\pi}{2} \right)$ égal au centre O du cercle circonscrit à ABC avec les coordonnées $(a \cos \hat{A}, b \cos \hat{B}, c \cos \hat{C})$, dont on sait que le conjugué isogonal est l'orthocentre H qui est donc égal à $K \left(\frac{\pi}{2} \right)$. Pour tout autre valeur de θ , on peut proposer comme coordonnées de $K'(\theta)$ le triplet $(x_{G'}, y_{G'}, z_{G'}) + \tan \theta (x_O, y_O, z_O)$. Si $t = \tan \theta$, ces coordonnées définissent le point X tel que :

$$(x_{G'} + tx_O) \overrightarrow{XA} + (y_{G'} + ty_O) \overrightarrow{XB} + (z_{G'} + tz_O) \overrightarrow{XC} = \vec{0}$$

Ce qui est équivalent successivement à :

$$(x_{G'} \overrightarrow{XA} + y_{G'} \overrightarrow{XB} + z_{G'} \overrightarrow{XC}) + t(x_O \overrightarrow{XA} + y_O \overrightarrow{XB} + z_O \overrightarrow{XC}) = \vec{0}$$

$$(x_{G'} + y_{G'} + z_{G'}) \overrightarrow{XG'} + t(x_O + y_O + z_O) \overrightarrow{XO} = \vec{0}$$

$$\overrightarrow{OX} = \frac{x_{G'} + y_{G'} + z_{G'}}{t(x_O + y_O + z_O) + (x_{G'} + y_{G'} + z_{G'})} \overrightarrow{OG'}$$

Puisque la fonction homographique f telle que $f(t) = \frac{x_{G'} + y_{G'} + z_{G'}}{t(x_O + y_O + z_O) + (x_{G'} + y_{G'} + z_{G'})}$ est une bijection de $\bar{\mathbb{R}}$ vers lui-même, tout point de la droite (OG') peut être atteint et coïncider avec un unique point $K'(\theta)$ lorsque $\theta = \tan^{-1}(t)$. Tout point de l'hyperbole de Kiepert peut donc être obtenu de manière unique à partir d'un angle de mesure $\theta \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right]$, comme point constructible par le procédé défini plus haut permettant d'aboutir à $K(\theta)$.

On peut définir plus précisément l'hyperbole de Kiepert du triangle ABC non équilatéral, à l'aide de son équation barycentrique dans le référentiel (A, B, C) . Puisqu'elle est conjuguée isogonale de la droite d'équation $\alpha x + \beta y + \gamma z = 0$, où l'on avait posé $\alpha = \frac{\sin(\hat{B} - \hat{C})}{a}$, $\beta = \frac{\sin(\hat{C} - \hat{A})}{b}$ et $\gamma = \frac{\sin(\hat{A} - \hat{B})}{c}$; en utilisant le lemme 4 page 114, on obtient cette équation :

$$a \sin(\hat{B} - \hat{C})yz + b \sin(\hat{C} - \hat{A})zx + c \sin(\hat{A} - \hat{B})xy = 0$$

Rappelons qu'on avait supposé le triangle ABC non isocèle, dans le cas contraire avec $\hat{A} = \hat{B}$ par exemple, les points $K'(\theta)$ vérifieraient une équation du type $x - y = 0$. la transformation par conjugaison isogonale aboutit à une conique d'équation $yz - xz = 0$, il s'agit de l'équation d'une hyperbole dégénérée en deux droites perpendiculaires d'équation $z = 0$ et $x = y$, ce sont respectivement (AB) et la médiatrice de $[AB]$. Mais en fait seuls les points de la médiatrice de $[AB]$ sont des points constructibles par le procédé permettant d'aboutir à $K(\theta)$.

V-8 Trajectoire selon une conique en mécanique classique

Toute modélisation mathématique d'un phénomène physique nécessite de mettre en évidence les approximations nécessaires, telle que l'assimilation d'un corps étendu dans l'espace à un seul point : généralement son centre de gravité. Nous assimilerons ainsi une étoile comme

le soleil à un point S de l'espace, et l'une de ses planètes comme la Terre à un point T ¹³. On admettra le principe ou loi de gravitation universelle postulée par Isaac Newton, concernant les forces d'attraction entre deux masses ponctuelles, ainsi que le principe fondamental de la mécanique classique reliant les notions de force et d'accélération¹⁴. Ces forces d'attraction exercées par l'un des corps sur l'autre sont opposées, de même direction que la droite passant par les deux points, leur intensité ou module est proportionnel à la masse des deux corps, ainsi qu'à l'inverse du carré de la distance entre ces deux masses ponctuelles.

Il nous faudra aussi considérer que ces deux corps sont isolés, c'est à dire qu'ils ne subiraient aucune influence de tout le reste du système planétaire et de l'univers. Cet abus obligé pour avoir un problème mathématique concernant seulement deux corps, permettra une mise en équation que nous pourrions résoudre assez simplement. On peut justifier cet abus pour deux raisons : tous les autres corps de notre système planétaire ont des masses négligeables par rapport à celle du soleil¹⁵, et tout le reste de l'univers étant suffisamment éloigné de notre système planétaire, on peut considérer comme égales, les accélérations dues aux forces d'attraction exercées par le reste de l'univers sur la terre ou le soleil, ce qui amène tout observateur lié à ces deux corps à les considérer comme s'ils étaient en mouvement à l'intérieur d'un système isolé et «immobile»¹⁶. Notre seul but ici étant de décrire le type de trajectoire des points S et T , nous n'aurons pas besoin de connaître les masses et l'intensité des forces en jeu, qui prennent cependant toute leur importance pour un physicien, qui doit confronter la solution mathématique aux mesures de la réalité physique.

Dans un repère modélisant un «morceau d'univers isolé», dans lequel évolueraient nos deux seuls corps en interaction gravitationnelle, à l'abri de toute autre influence, considérons les vecteurs $\vec{r}_1(t) = \vec{OT}(t)$ et $\vec{r}_2(t) = \vec{OS}(t)$ où O est l'origine du repère considérée comme fixe, $T(t)$ la position du centre de la terre à l'instant t et $S(t)$ la position du centre du soleil à l'instant t . Le principe fondamental de la dynamique en mécanique classique nous permet de poser :

$$\begin{cases} m_1 \times r_1''(t) &= \vec{F} \\ m_2 \times r_2''(t) &= -\vec{F} \end{cases}$$

où m_1 est la masse de la Terre, m_2 la masse du soleil et \vec{F} la force d'attraction exercée par le soleil sur la Terre. On obtient par addition $m_1 \times r_1''(t) + m_2 \times r_2''(t) = \vec{0}$, en désignant par M la masse totale $m_1 + m_2$ et par $G(t)$ le barycentre de $(T(t), m_1)$ et $(S(t), m_2)$, on pourra poser $\vec{OG}(t) = \vec{R}(t)$ pour obtenir $M \times R''(t) = \vec{0}$ où M désigne la masse totale $m_1 + m_2$. On obtient $\vec{R}(t) = \vec{R}(0) + t \cdot \vec{R}'(0)$, qui signifie que le centre de gravité G serait animé d'un mouvement uniforme à vitesse constante égale à celle qu'il a à l'instant $t = 0$.

13. Pour prendre conscience de la légitimité de ces approximations, dans un système solaire modélisé à l'échelle 10^{-11} , la terre serait à 1,5 mètre du soleil, celui-ci serait une bille de 1,4 centimètre de diamètre, et la terre serait un grain de poussière de 0,13 millimètre de diamètre

14. Voir [2] et [7] pour une très bonne initiation aux principes de la mécanique classique, [7] plus moderne aide à une prise de conscience de la nécessité d'en dépasser ses abus et approximations par la mécanique relativiste d'Albert Einstein.

15. On estime aujourd'hui que le soleil concentre près de 99,9% de la masse totale de tout le système solaire.

16. À l'échelle 10^{-11} , Proxima du Centaure qui est l'étoile autre que le soleil la plus proche de nous, serait à plus de 400 kilomètres, et l'hypothétique trou noir au centre de la voie lactée serait à plus de 2,4 millions de kilomètres. (concernant ces grandeurs physiques, voir wikipedia : https://fr.wikipedia.org/wiki/Syst%C3%A8me_solaire).

Annexe A

Distinction entre angles de vecteurs et angles de droites

A-1 Rotation et angle de 2 vecteurs

Afin d'être sans ambiguïté sur le théorème de l'angle inscrit redémontré page 151 et largement utilisé par la suite, la définition d'un angle de droites qui n'est plus abordée avant le niveau Bac doit être précisée; revenons pour cela sur certains points concernant la notion plus familière d'angle de vecteurs. Dans un plan affine \mathcal{E}_2 dirigé par l'espace vectoriel E_2 , tout couple $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD})$ de vecteurs non nuls définit une unique rotation de l'espace vectoriel E_2 , telle que l'image du vecteur unitaire $\frac{1}{AB}\overrightarrow{AB}$ soit le vecteur unitaire $\frac{1}{CD}\overrightarrow{CD}$. Pour être une rotation, un endomorphisme r de E_2 doit avoir un **déterminant positif** et conserver la norme, autrement dit, pour tout vecteur $\vec{u} \in E_2$, on doit avoir $\|r(\vec{u})\| = \|\vec{u}\|$. Rappelons que si un endomorphisme r conserve les normes, alors il conserve le produit scalaire, car pour tout couple de vecteurs (\vec{u}, \vec{v}) on a :

$$\begin{aligned}\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 &= \|r(\vec{u} + \vec{v})\|^2 = \|r(\vec{u}) + r(\vec{v})\|^2 \\ \text{Donc : } \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} &= \|r(\vec{u})\|^2 + 2r(\vec{u}) \cdot r(\vec{v}) + \|r(\vec{v})\|^2 \\ \text{Par conservation des normes on en déduit : } r(\vec{u}) \cdot r(\vec{v}) &= \vec{u} \cdot \vec{v}\end{aligned}$$

Attention, il est absolument nécessaire que l'application r qui conserve la norme soit morphisme de groupe additif pour qu'elle conserve le produit scalaire. On obtient très simplement une application d'un espace vectoriel réel dans lui-même qui conserve la norme, mais pas le produit scalaire, en associant à tout vecteur lui-même si et seulement si il a des coordonnées rationnelles dans une base orthonormée fixée par avance, mais qui associe son opposé s'il a une coordonnée irrationnelle. Une telle application conserve évidemment la norme, mais change le signe du produit scalaire de deux vecteurs, lorsque un et un seul des deux vecteurs a des coordonnées irrationnelles. L'image d'une base orthonormée (\vec{i}, \vec{j}) par un endomorphisme φ qui conserve les normes, est donc elle aussi une autre base orthonormée. Si on désigne par (\vec{u}, \vec{v}) cette base image telle que $\vec{u} = \varphi(\vec{i}) = a\vec{i} + b\vec{j}$, alors nécessairement $a^2 + b^2 = 1$ et $\vec{v} = \varphi(\vec{j})$ ne peut être que l'un des deux vecteurs suivants :

1^{er} cas : $\vec{v} = b\vec{i} - a\vec{j}$. Dans cette situation, l'endomorphisme φ admet pour matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}$ et on vérifie aisément que $(b\vec{i} + (1-a)\vec{j}; -b\vec{i} + (1+a)\vec{j})$ est une base orthogonale (mais

pas normée), telle que φ admette $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ pour matrice dans cette base. Cette matrice montre que φ est alors la symétrie orthogonale par rapport à la droite vectorielle dirigée par $\vec{u} = b\vec{i} + (1-a)\vec{j}$.

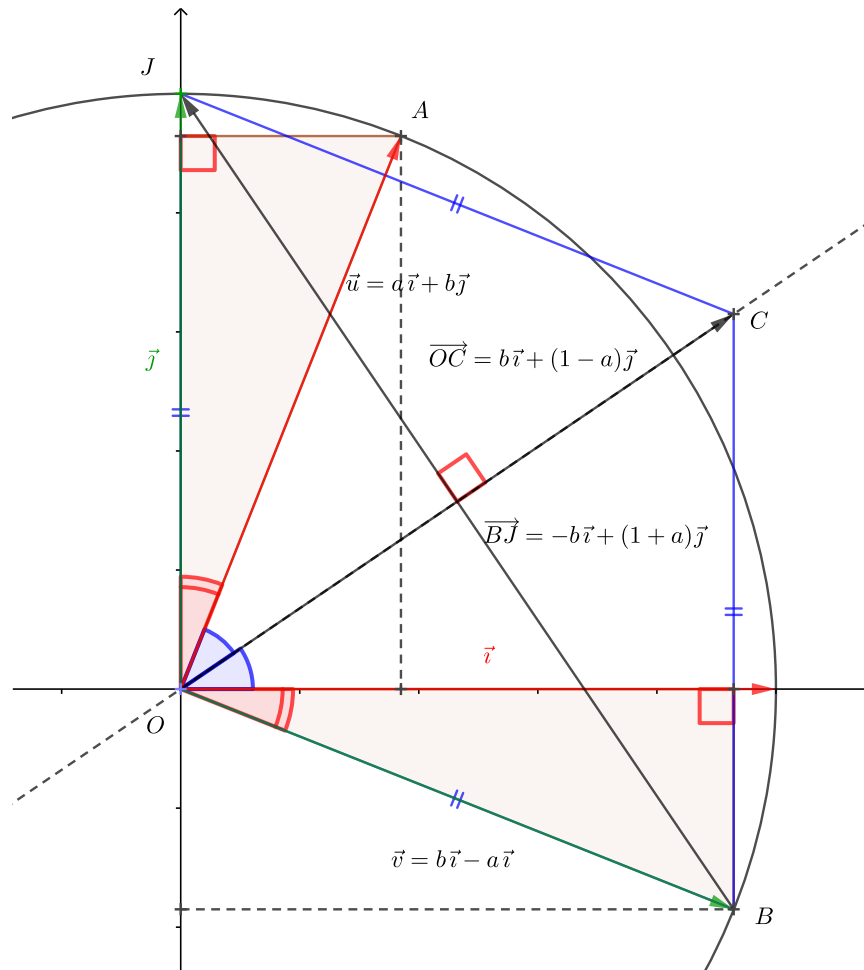


FIGURE A.1 – Symétrie de matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}$ dans la base orthonormée (\vec{i}, \vec{j}) . L'axe de symétrie est dirigé par $\vec{AC} = b\vec{i} + (1-a)\vec{j}$

2^e cas : $\vec{v} = -b\vec{i} + a\vec{j}$. Dans cette éventualité, l'endomorphisme φ admet pour matrice $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$. Cette situation se distingue bien de la précédente par le fait que le déterminant de φ est positif, puisqu'égal à $a^2 + b^2 = \|\varphi(\vec{i})\| = \|\varphi(\vec{j})\| = 1$, alors que le déterminant de la symétrie est $-a^2 - b^2 = -1$. Géométriquement, φ doit être interprété comme une rotation. Lorsque φ est une rotation, on montre que sa matrice dans toute autre base orthonormée est $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ ou $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$. Ces deux éventualités sont illustrées sur sur la figure A.2, à l'aide de trois cercles de rayons a , b et 1. Il apparait sur cette figure que la

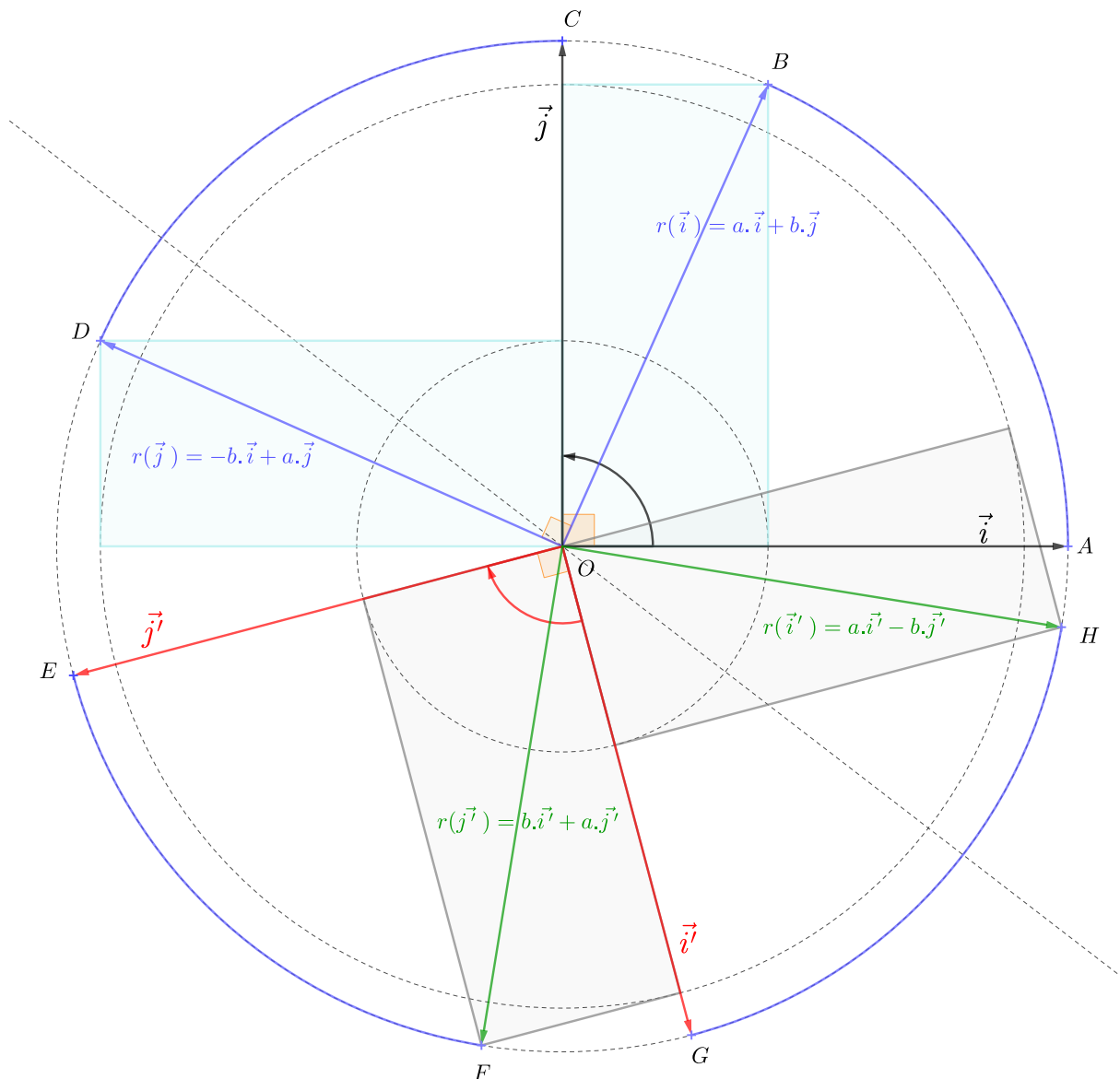


FIGURE A.2 – Rotation de matrice $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ dans une base orthonormée directe.

On convient que les bases (\vec{i}', \vec{j}') et (\vec{i}, \vec{j}) sont directes, et que la base (\vec{u}, \vec{v}) est indirecte

rotation qui admet pour matrice $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ dans la base (\vec{i}, \vec{j}) , transforme cette base en la base (\vec{i}', \vec{j}') , mais sa matrice dans la base (\vec{u}, \vec{v}) ou (\vec{j}, \vec{i}) est $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$.

Si nous avons utilisé l'une des bases bases orthonormées (\vec{v}, \vec{u}) , $(\vec{u}, -\vec{v})$, ou $(-\vec{u}, \vec{v})$, nous aurions la même matrice que dans la base (\vec{i}, \vec{j}) . Pour lever cette ambiguïté et n'avoir qu'un seul type de matrice, il est nécessaire d'effectuer une partition dans l'ensemble des bases orthonormées de E_2 en deux parties, telle que toute rotation admette une même matrice dans les bases d'une même classe. On dit que l'on oriente le plan, en choisissant conventionnellement

l'une de ces deux classes, dont les éléments seront les bases orthonormées qualifiées de directes, toutes les autres bases orthonormées seront dites indirectes. Géométriquement, cela revient à choisir un sens de rotation privilégié appelé sens trigonométrique ou sens positif, en observant que deux bases «tournent dans le même sens» quand on va du premier vecteur vers le deuxième vecteur, si et seulement si elles n'admettent pas d'axe de symétrie.

(\vec{i}, \vec{j}) et (\vec{u}, \vec{v}) ont même orientation si et seulement si (\vec{i}, \vec{j}) et (\vec{v}, \vec{u}) sont symétriques

S'il y a axe de symétrie, il est nécessairement dirigé par $\vec{i} + \vec{v}$ et $\vec{j} + \vec{u}$, on peut donc reformuler le fait que deux bases orthonormées ont la même orientation de la manière suivante :

(\vec{i}, \vec{j}) et (\vec{u}, \vec{v}) ont même orientation si et seulement si $\vec{i} + \vec{u}$ et $\vec{j} + \vec{v}$ ont même direction

Sur la figure A.2, les bases (\vec{i}, \vec{j}) , (\vec{i}', \vec{j}') et $(\vec{u}, -\vec{v})$ sont de même orientation car elles «tournent dans le même sens antihoraire», que l'on a convenu d'être les sens positif. Lorsque qu'une orientation a été fixée, on convient de mesurer une rotation telle que celle qui transforme \vec{i} en \vec{i}' sur la figure A.2, par le nombre positif θ égal à la longueur de l'arc de cercle \widehat{AB} de rayon 1 et centre O , qui va de A vers B en tournant dans le sens positif. Mais on peut aussi caractériser cette rotation par le nombre négatif $\theta - 2\pi$, c'est l'opposé de la longueur de l'arc de cercle \widehat{BA} qui va de B vers A en tournant dans le sens positif (c'est le même arc que celui qui va de A vers B dans le sens négatif). Une fois fixé un sens de rotation positif, un seul des deux nombres $\theta > 0$ ou bien $(\theta - 2\pi) < 0$ suffit à caractériser la rotation.

Pour l'étude des fonctions $\cos : \mathbb{R} \rightarrow [-1; 1]$ et $\sin : \mathbb{R} \rightarrow [-1; 1]$ et de leurs propriétés, on renvoie à n'importe quel cours sur les fonctions trigonométriques de première en lycée. On les définit comme fonctions périodiques de période 2π , elles associent à toute mesure $\theta \in [0; 2\pi[$ d'une rotation, les deux coefficients caractéristiques de la matrice de cette rotation dans une base orthonormée directe quelconque. Étant donné que nous avons des fonctions de périodes 2π , cette définition pour $\theta \in [0; 2\pi[$ suffit à déterminer l'image de tous les nombres réels. Pour la rotation r de la figure A.2, un tel nombre θ représente alors la distance parcourue par un point mobile, qui se déplacerait sur le cercle de rayon 1 pour aller de A en B en tournant dans le sens positif. c'est aussi la longueur des arcs \widehat{CD} , \widehat{EF} et \widehat{GH} parcourus positivement, on pose alors les définitions suivantes :

- $\cos \theta = a$,
c'est l'abscisse de B dans la base (\vec{i}, \vec{j})
ou l'abscisse de H dans la base $(\vec{u}, -\vec{v})$.
- $\sin \theta = b$,
c'est l'ordonnée de B dans la base (\vec{i}, \vec{j}) ,
ou l'ordonnée de H dans la base $(\vec{u}, -\vec{v})$.

On considère que les mesures $\theta + 2k\pi$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$ caractérisent la même rotation, les valeurs absolues de ces mesures représentent la distance parcourue sur le cercle de rayon 1, par le point mobile évoqué plus haut, qui après être passé une première fois en B accomplirait $|k|$ tours supplémentaires dans un sens de rotation indiqué par le signe de k .

L'intérêt de caractériser ainsi une rotation par toute une classe d'équivalence de nombres réels de la forme $\alpha + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$; est que si θ et θ' sont des mesures quelconques des rotations r et r' , il n'est pas nécessaire que $\theta + \theta'$ soit dans l'intervalle $[0; 2\pi[$ pour caractériser

la rotation $r \circ r'$, et de plus $-\theta$ est un moyen commode de caractériser la rotation r^{-1} inverse de r . On dit que l'on a défini un isomorphisme entre le groupe commutatif des rotations de E_2 , et le groupe additif des classes d'équivalence modulo 2π dans l'ensemble des nombre réels noté $(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{R}; +)$.

On appelle angle des deux vecteurs \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{CD} non nuls, l'unique rotation qui transforme $\frac{1}{AB}\overrightarrow{AB}$ en le vecteur $\frac{1}{CD}\overrightarrow{CD}$, on le note avec des crochets : $[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}]$, notation qu'il ne faut pas confondre avec l'écriture d'un couple tel que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD})$, qui utilise des parenthèses. L'égalité entre couples $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = (\overrightarrow{u'}, \overrightarrow{v'})$ signifie que $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{u'}$ et $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{v'}$, alors que l'égalité entre angles de vecteurs $[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}] = [\overrightarrow{u'}, \overrightarrow{v'}]$ signifie qu'il existe une rotation r nécessairement unique, telle que :

$$\frac{1}{\|\overrightarrow{u}\|} r(\overrightarrow{u}) = \frac{1}{\|\overrightarrow{v}\|} \overrightarrow{v} \quad \text{et} \quad \frac{1}{\|\overrightarrow{u'}\|} r(\overrightarrow{u'}) = \frac{1}{\|\overrightarrow{v'}\|} \overrightarrow{v'}$$

Quand des rotations seront écrites sous forme d'un angle de vecteurs, on utilisera les conventions d'écritures additives en usage habituellement dans tout groupe commutatif, ce qui revient à remplacer le symbole de composition des applications \circ , par le symbole d'addition :

- si $r = [\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}]$ et $r' = [\overrightarrow{u'}, \overrightarrow{v'}]$ alors

$$[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}] + [\overrightarrow{u'}, \overrightarrow{v'}] = [\overrightarrow{u'}, \overrightarrow{v'}] + [\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}] = r \circ r' = r' \circ r,$$
- Quelques soient u, v et w dans E_2 :
 - * $[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}] + [\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}] = [\overrightarrow{u}, \overrightarrow{w}]$, (relation de Chasles),
 - * $[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}] = -[\overrightarrow{v}, \overrightarrow{u}]$
 - * $[\overrightarrow{uu}] = [\overrightarrow{vv}] = 0$.

On notera $\widehat{[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}]}$, la classe d'équivalence de tous les nombres réels θ tels que $\begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$ soit

la matrice de la rotation $[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}]$, Alors que $[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}] + [\overrightarrow{u'}, \overrightarrow{v'}]$ est une composition d'applications,

l'écriture $\widehat{[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}]} + \widehat{[\overrightarrow{u'}, \overrightarrow{v}]}$ doit être comprise comme une addition dans le groupe $(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{R}; +)$ entre classes d'équivalence de nombre réels. Il n'y a aucun inconvénient à confondre ces deux additions, puisque les deux groupes dans lesquels elles s'expriment sont isomorphes. Mais il faudra toujours avoir présent à l'esprit, que les calculs sur les mesures d'angles de vecteurs sont toujours définis modulo 2π : expression qui signifie que dans tout opération dans $(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{R}; +)$, additionner ou soustraire un multiple entier de 2π à toute mesure d'un angle, permet d'obtenir une autre mesure caractéristique du même angle de vecteurs.

A-2 Angles de deux droites

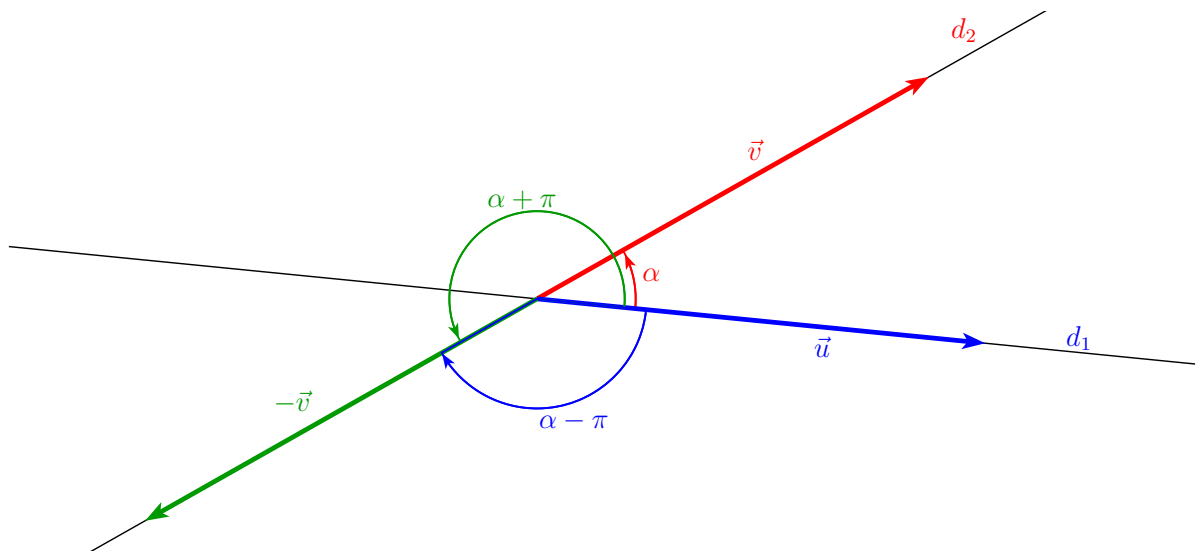
Dans un plan affine \mathcal{E}_2 dirigé par l'espace vectoriel E_2 , étant donné deux droites d_1 et d_2 il existe deux rotations vectorielles de E_2 , telles que l'image par cette rotation d'un vecteur directeur \overrightarrow{u} de d_1 soit un vecteur de même norme que \overrightarrow{u} qui dirige d_2 ; il existe deux vecteurs opposés ayant cette propriété, désignons les par \overrightarrow{v} et $-\overrightarrow{v}$. Soit h la rotation de mesure π qui est aussi l'homothétie de rapport -1 telle que $h : E_2 \rightarrow E_2$, les deux seules rotations qui

$$u \mapsto -u$$

transforment tout vecteur directeur de d_1 en un vecteur directeur de d_2 , sont la rotation r telle que $r(\vec{u}) = \vec{v}$ et $r' = r \circ h$. On a bien $r'(\vec{u}) = -\vec{v}$ et l'égalité entre les deux paires $\{r', r' \circ h\}$ et $\{r, r \circ h\}$, ce qui permet de définir un angle entre deux droites de la manière suivante :

DÉFINITION 14 *étant donné deux droites $d_1 = (AB)$, $d_2 = (CD)$ dans un plan affine \mathcal{E}_2 , l'angle de droites désigné par $[d_1, d_2]$ ou bien $[(AB), (CD)]$ est la paire de rotations de l'espace vectoriel qui dirige le plan affine, telles que l'image d'un vecteur directeur de d_1 par ces deux rotations, soit un vecteur directeur de d_2 .*

Il s'agit évidemment d'une notion d'angle orienté à bien distinguer de la notion d'angle de vecteurs, la mesure de l'angle de vecteurs $[\vec{u}, \vec{v}]$ ou de la rotation r qui transforme $\frac{1}{\|\vec{u}\|}\vec{u}$ en $\frac{1}{\|\vec{v}\|}\vec{v}$ est définie modulo 2π , si α est une mesure de cet angle, alors $\alpha + \pi$ et $\alpha - \pi$ sont des mesures de l'angle $[\vec{u}, -\vec{v}]$ ou de la rotation $r \circ h$. Une mesure d'un angle de droite tel que $[d_1, d_2] = \{r, r \circ h\}$ est donc définie modulo π .



La mesure de l'angle de droite $[d_1, d_2]$ est définie modulo π .

Si \vec{u} dirige la droite d_1 et \vec{v} dirige la droite d_2 , toutes les mesures des deux angles $[\vec{u}, \vec{v}]$ et $[\vec{u}, -\vec{v}] = [-\vec{u}, \vec{v}]$ sont des mesures de l'angle de droites $[d_1, d_2]$. Mais inversement toute mesure de $[d_1, d_2]$ n'est pas nécessairement une mesure de $[\vec{u}, \vec{v}]$, car il peut s'agir d'une mesure de $[\vec{u}, -\vec{v}]$, ces mesures pourraient être équivalentes modulo π , uniquement dans la situation où \vec{u} et \vec{v} sont orthogonaux.

Étant donné un deuxième angle de droites $\{r', r' \circ h\}$, on peut remarquer que $\{r \circ r', r \circ r' \circ h\}$ définit un troisième angle de droites, dont les deux représentants sont la composition dans n'importe quel ordre, d'un élément de $\{r', r' \circ h\}$ avec un élément de $\{r, r \circ h\}$, car $h^2 = \text{Id}_{E_2}$. L'ordre de composition est indifférent car le groupe des rotations du plan vectoriel est commutatif, cela nous permet de définir une opération à laquelle on peut appliquer la relation de Chasles : $[d_1, d_2] + [d_2, d_3] = [d_1, d_3]$. Si $\{r', r' \circ h\}$ est la paire de rotations qui transforment le vecteur

directeur \vec{v} de d_2 en un vecteur directeur $\pm\vec{w}$ de d_3 , le résultat de cette addition découle trivialement des égalités $r' \circ r(\vec{u}) = r'(\vec{v}) = \pm\vec{w}$ et par conséquent $[d_1, d_3] = \{r \circ r', r \circ r' \circ h\}$. Toutes les règles habituelles de calcul dans un un groupe¹ commutatif noté additivement sont applicables, son élément neutre peut être noté sans inconvénient 0 au lieu de $[d, d] = \{\text{Id}_{E_2}, h\}$, cela permet d'écrire $[d_1, d_2] + [d_2, d_1] = 0$ et $[d_2, d_1] = -[d_1, d_2]$. Comme dans tout groupe commutatif, nous pourrions utiliser les règles de calculs suivantes :

- $\underbrace{[d, d'] + \dots + [d, d']}_{n \text{ angles tous égaux à } [d, d']}$ $= n.[d, d'] = -n.[d', d]$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
si r est une rotation telle que $r(d) = d'$,
cette égalité signifie que $n.[d, d'] = \{r^n, r^n \circ h\}$.
- $n[d, d'] + m[d, d'] = (n + m)[d, d']$ pour tout $(n; m) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.
- $n[d, d'] + n[d', d'] = n[d, d'']$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

Comme pour les angles de vecteurs, nous désignerons par $[(\widehat{AB})(\widehat{CD})] \in \mathbb{R}/\pi\mathbb{R}$, la classe d'équivalence de tous les réels équivalents modulo π qui caractérisent l'angle de droites $[(AB)(CD)]$ constitué de deux rotations.

La relation de Chasles permet d'obtenir les équivalences ci-dessous utiles dans beaucoup de raisonnements, par le même procédé utilisé pour les vecteurs définis à partir des couples de points, ou des angles de vecteurs définis à partir des couples de vecteurs,

$$[d, e] = [f, g] \Leftrightarrow [d, f] = [e, g] \Leftrightarrow [g, e] = [f, d] \Leftrightarrow [g, f] = [e, d]$$

On dit obtenir ces égalités équivalentes par permutations des droites moyennes ou extrêmes.

A-3 Conditions pour que 4 points soient cocycliques.

THÉORÈME 24 (THÉORÈME DE L'ANGLE INSCRIT) *Si A et B sont deux points d'un cercle \mathcal{C} de centre O, pour tout point $M \in \mathcal{C}$, le double d'une mesure de l'angle de droites $[(MA), (MB)]$ est défini modulo 2π , c'est une mesure de l'angle de vecteurs $[\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}]$.*

Attention dans ce théorème à bien distinguer angle de vecteurs dont la mesure est définie modulo 2π , et angles de droites dont la mesure est définie modulo π . Pour prouver ce théorème, considérons la droite d tangente à \mathcal{C} en M , ainsi que les points A' milieu de $[MA]$ et B' milieu de $[MB]$, (OA') et (OB') sont respectivement les médiatrices de $[MA]$ et $[MB]$. Les angles de droites $[(OM), d]$, $[(OA'), (MA)]$ et $[(OB'), (MB)]$ admettent $\pm\frac{\pi}{2}$ pour mesure, on en déduit les

$$\text{égalités suivantes : } \begin{cases} [(OA'), (OM)] = [(MA), d] \\ [(OM), (OB')] = [d, (MB)] \end{cases} .$$

- Soit α une mesure de l'angle de vecteurs $[\overrightarrow{OA'}, \overrightarrow{OM}]$, c'est aussi une mesure de l'angle de droite $[(MA), d]$, 2α est donc une mesure de l'angle de droites $2[(MA), d]$. Mais puisque (OA') est médiatrice de $[MA]$, 2α est aussi une mesure de l'angle de vecteurs $[\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OA'}] + [\overrightarrow{OA'}, \overrightarrow{OM}] = [\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM}]$.
- De même si β est une mesure de l'angle de vecteurs $[\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OB'}]$, 2β est une mesure de l'angle de droites $2[d, (MB)]$ et de l'angle de vecteurs $[\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OB}]$.

1. Pour les connaisseurs, il s'agit du groupe quotient des rotations de E_2 par son sous-groupe $\{\text{Id}_{E_2}, h\}$

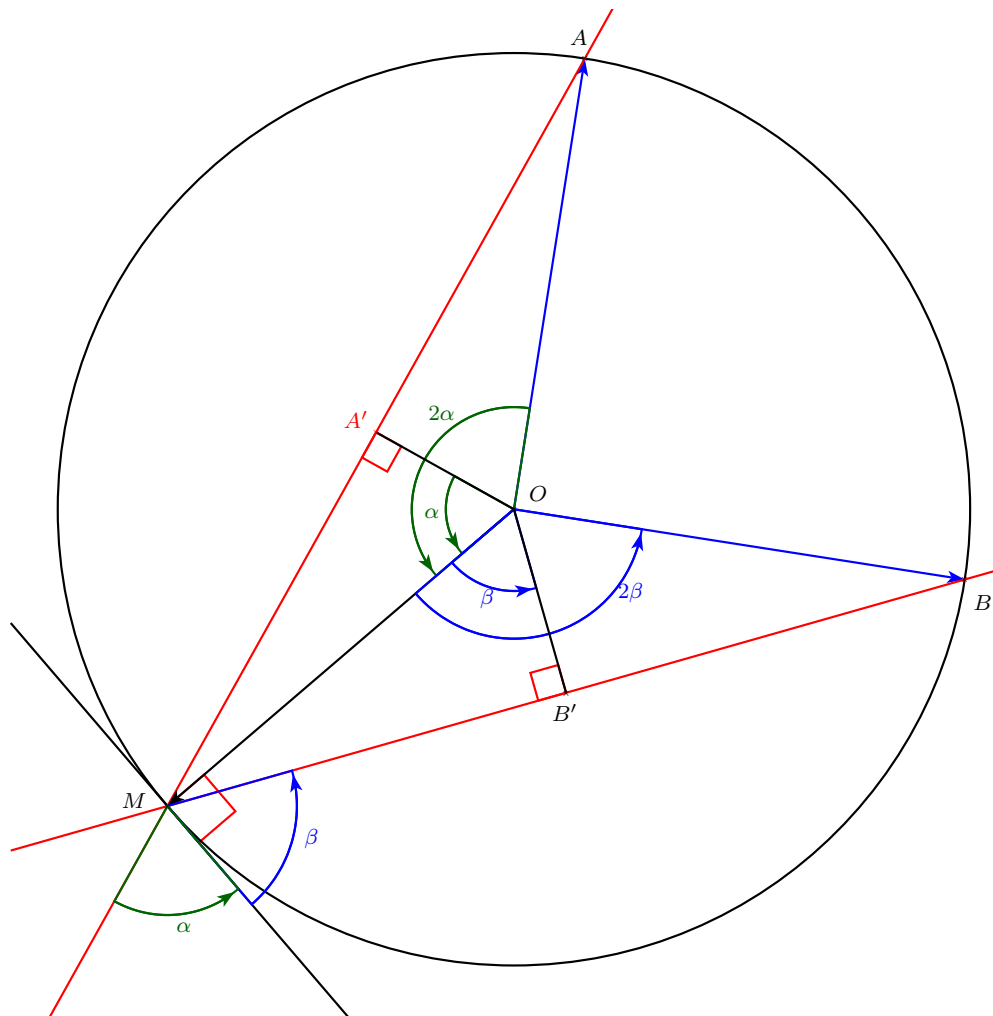


FIGURE A.3 – Illustration du théorème de l'angle inscrit

On en déduit que $2\alpha + 2\beta$ exprime une mesure de deux angles de nature différentes :

- l'angle de vecteurs $[\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM}] + [\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OB}] = [\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}]$
- l'angle de droites $2[(MA), d] + 2[d, (MB)] = 2[(MA), d] + [d, (MB)] = 2[(MA), (MB)]$.

Ce résultat permet de montrer le théorème suivant :

THÉORÈME 25 *Quatre points distincts M, M', A et B d'un plan affine euclidien sont alignés ou cocycliques; si et seulement si ils vérifient l'égalité entre angles de droites :*

$$[(MA), (MB)] = [(M'A), (M'B)]$$

Si les quatre points sont alignés il est évident que les angles sont nuls et égaux, si les quatre points sont cocycliques l'égalité des angles de droites est un corollaire du théorème de l'angle inscrit. En effet, si α est une mesure de l'angle de droites $[(MA)(MB)]$ alors 2α est une mesure de l'angle de vecteurs $[\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}]$, de même si β est une mesure de l'angle de droites $[(M'A), (M'B)]$ alors 2β est une mesure de l'angle de vecteurs $[\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}]$. On en déduit $2\alpha \equiv 2\beta$ modulo 2π , ce qui est équivalent à $\alpha \equiv \beta$ modulo π , d'où l'égalité $[(MA)(MB)] = [(M'A), (M'B)]$.

Réciproquement, supposons que $[(MA)(MB)] = [(M'A)(M'B)]$, et désignons par θ une mesure de cet angle. Si $\theta \equiv 0$ modulo π , il est évident que les points sont alignés, si $\theta \equiv \pm \frac{\pi}{2}$ modulo π , alors, il existe un unique cercle circonscrit à ABM et aussi à ABM' , son diamètre est l'hypoténuse $[AB]$ commune à ces deux triangles rectangles. Dans les cas de figures où les triangles ABM et ABM' ne sont ni rectangles ni aplatis, considérons le centre O du cercle circonscrit au triangle ABM , et le centre O' du cercle circonscrit au triangle ABM' : ils sont nécessairement distincts du milieu I de $[AB]$. D'après le théorème de l'angle inscrit, les angles de vecteurs $[\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}]$ et $[\overrightarrow{O'A}, \overrightarrow{O'B}]$ admettent 2θ pour mesure. Dans la situation où $O \neq I$ et $O' \neq I'$, on peut considérer les quatre angles de vecteurs $[\overrightarrow{O'A}, \overrightarrow{O'I}]$, $[\overrightarrow{O'I}, \overrightarrow{O'B}]$, $[\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OI}]$ et $[\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OB}]$, par symétrie par rapport à la médiatrice de $[AB]$ on voit qu'ils admettent nécessairement la même mesure θ . Puisque $IO \neq 0$ et $IO' \neq 0$, on peut poser le calcul $\tan |\theta| = \frac{IA}{IO} = \frac{IA}{IO'}$, et montrer ainsi que $IO = IO'$. Si O était différent de O' , le quadrilatère $OAO'B$ serait alors un losange non aplati de centre I , avec des angles de vecteurs $[\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OI}]$ et $[\overrightarrow{O'A}, \overrightarrow{O'I}]$ opposés et pourtant de même mesure θ . Or les seules mesures θ qui permettent d'obtenir un angle égal à son opposé, doivent vérifier $\theta \equiv 0$ modulo π , ceci est en contradiction avec un losange $OAO'B$ non aplati, A, B, M et M' sont donc sur un même cercle de centre O confondu avec O' .

De la même manière qu'une droite passant par les points A et B peut être définie comme réunion de ces deux points, et de l'ensemble de tous les autres points d'où le bipoint (A, B) est vu sous un angle de mesure nulle modulo π , ce théorème permet de définir le cercle $\mathcal{C}(ABC)$ circonscrit au triangle ABC . Dans un plan euclidien \mathcal{P} , si $\alpha \in \mathbb{R}/\pi\mathbb{R}$ est la mesure de l'angle de droites $[(AB), (AC)]$

$$\mathcal{C}(ABC) = \{B; C\} \cup \left\{ M \in \mathcal{P} / [(\widehat{MB}), (\widehat{MC})] = \alpha \right\}$$

A-4 Droite de Simson et Steiner dans un triangle

4-1 Théorème de Simson

THÉORÈME 26 (DÉFINITION DES DROITES DE SIMSON DANS UN TRIANGLE) *Étant donné un triangle ABC non aplati et un point quelconque F , les projetés orthogonaux de ce point sur les droites (AB) , (BC) et (CA) sont alignés, si et seulement si ce point est sur le cercle \mathcal{C} circonscrit au triangle.*

À Tout point $F \in \mathcal{C}$, le triangle ABC permet donc d'associer une droite appelée droite de Simson de F relativement à ABC , elle passe par les projetés orthogonaux de F sur les droites qui supportent les côtés du triangle.

Si F est un sommet du triangle, il est évidemment sur le cercle circonscrit et ses projetés au nombre de deux, sont tout aussi évidemment alignés. Si F n'est pas un sommet du triangle, par projection orthogonale de ce point sur les cotés du triangle ABC , on obtient trois points distincts $A' \in (BC)$, $B' \in (AC)$ et $C' \in (AB)$. Par relation de Chasles, on a l'égalité suivante :

$$[(A'B'), (A'C')] = [(A'B'), (A'F)] + [(A'F), (A'C')]$$

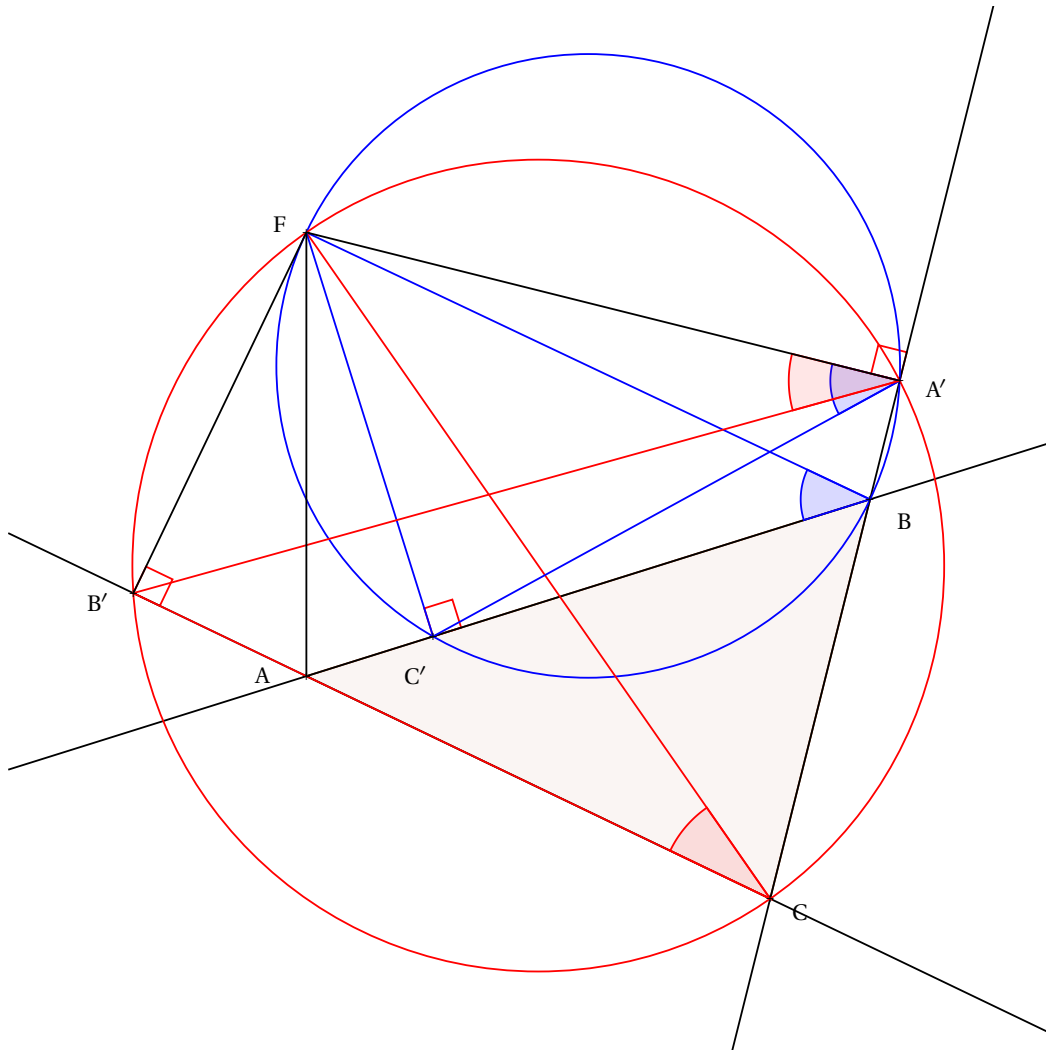


FIGURE A.4 – Propriétés des projetés orthogonaux d'un point sur les côtés d'un triangle.

Puisque (F, C, A', B') et (F, B, A', C') sont des quadruplets de points cocycliques sur les cercles de diamètres $[FC]$ et $[FB]$, on en déduit :

$$[(A'B'), (A'C')] = [(CB'), (CF)] + [(BF)(BC')]$$

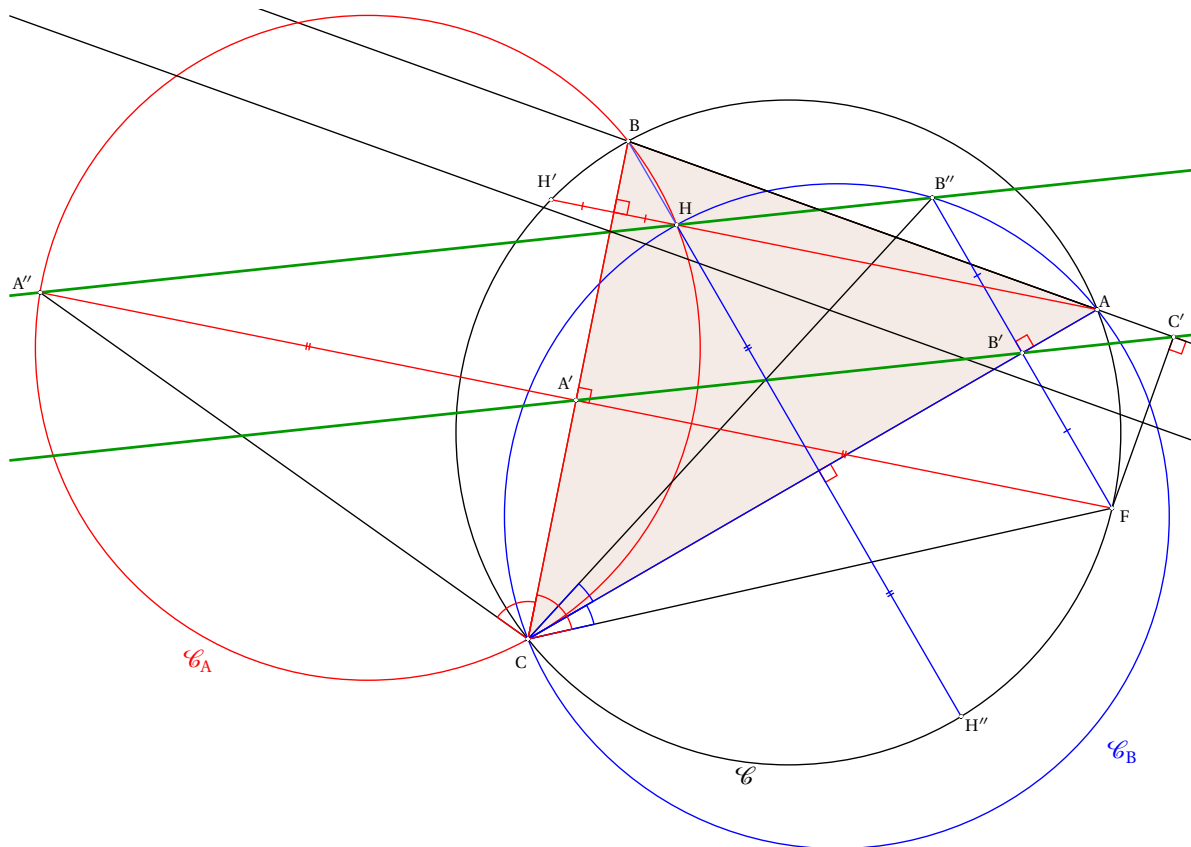
Étant donné que $(CB') = (CA)$ et $(BC') = (BA)$, on obtient finalement :

$$[(A'B')(A'C')] = [(CA)(CF)] - [(BA)(BF)]$$

Puisque A', B' et C' sont alignés si et seulement si $[(A'B'), (A'C')]$ est nul, on en déduit que l'alignement de ces points est équivalent à l'égalité entre les deux angles de cette dernière égalité, ce qui d'après le théorème 25, signifie que F est cocyclique avec les points A, B et C . Sur la figure A.4, F n'est pas sur le cercle circonscrit à ABC , A', B' et C' ne sont pas alignés, par contre sur la figure A.5, ils sont alignés, car F est sur le cercle circonscrit à ABC .

4-2 Droite de Steiner

Étant donné un point F sur le cercle circonscrit au triangle ABC , on appelle droite de Steiner de F relativement au triangle ABC , la droite qui passe par les symétriques de F par rapport aux côtés du triangle. Ces trois points sont alignés car ils sont sur l'image de la droite de Simson par l'homothétie de centre F et rapport 2. Comme illustré sur la figure A.5, deux constructions de symétriques $\mathcal{S}_{(BC)}(F) = A''$ et $\mathcal{S}_{(CA)}(F) = B''$ suffisent donc pour tracer cette droite. En utilisant ces deux seuls symétriques, nous allons montrer que la droite de Steiner de tout point F sur le cercle circonscrit à ABC , passe par l'orthocentre H du triangle.



F sur le cercle \mathcal{C} circonscrit au triangle ABC admet pour droite de Simson $(A'B')$; l'image de cette droite par homothétie de centre F et rapport 2 est la droite $(A''B'')$ appelée droite de Steiner de F , elle passe par l'orthocentre H de ABC pour tout $F \in \mathcal{C}$.

FIGURE A.5 – Droite de Simson et Steiner dans un triangle

Cela est évident lorsque le triangle est rectangle, supposons par exemple qu'il soit rectangle en C qui est alors orthocentre, par composition des deux symétries axiales par rapport à (BC) et (AC) , on obtient une symétrie centrale de centre C . L'orthocentre C est alors le milieu de $[A''B'']$ car $\mathcal{S}_C(B'') = \mathcal{S}_{(BC)} \circ \mathcal{S}_{(AC)}(B'') = \mathcal{S}_{(BC)}(F) = A''$.

Si le triangle ABC n'est pas rectangle, son orthocentre H ne peut pas être l'un des ses sommets, on peut alors construire les cercles \mathcal{C}_A et \mathcal{C}_B respectivement circonscrits aux triangles BCH et ACH ; calculons le diamètre de ces cercles à l'aide de la formule des sinus dans un triangle. Étant donné que $(HA) \perp (BC)$ et $(HC) \perp (BA)$, on a :

$$[(HA)(BC)] = [(HC)(BA)] \Rightarrow [(HA), (HC)] = [(BC)(BA)]$$

Les mesures des angles de droites $[(HB)(HC)]$ et $[(AC)(AB)]$ sont donc égales modulo π , le calcul des diamètres de \mathcal{C}_A et \mathcal{C}_B aboutit par conséquent au même résultat :

$$\frac{AC}{\sin \widehat{AHC}} = \frac{AC}{\sin \widehat{ABC}} = \frac{BC}{\sin \widehat{BAC}} = \frac{BC}{\sin \widehat{BHC}}$$

Or deux cercles de même diamètre ou rayon sont symétriques par rapport à la médiatrice de leurs centres; lorsque ces deux cercles de même rayon sont sécants, les deux points d'intersection sont sur la médiatrice de leurs centres, cela suffit à justifier que \mathcal{C}_A et \mathcal{C}_B sont les symétriques de \mathcal{C} , respectivement par rapport à (BC) et (AC) . Au passage on peut observer que les symétriques de l'orthocentre par rapport au trois droites qui supportent les côtés du triangle, sont sur son cercle circonscrit. On en déduit que $H \in (A''B'')$, car :

$$[(HB''), (HA'')] = [(HB''), (HC)] + [(HC), (HA'')]$$

Les points A'' et B'' symétriques de F respectivement par rapport à (BC) et (AC) , sont tels que $B'' \in \mathcal{C}_B$ et $A'' \in \mathcal{C}_A$; les quadrilatères $ACHB''$ et $BHCA''$ sont donc inscrits dans les cercles \mathcal{C}_B et \mathcal{C}_A . À l'aide du théorème 25 on en déduit :

$$[(HB''), (HA'')] = [(AB''), (AC)] + [(BC), (BA'')]$$

Par symétrie par rapport aux axes (AC) et (BC) , on obtient :

$$[(HB''), (HA'')] = [(AC), (AF)] + [(BF), (BC)]$$

Cet angle de droites est donc nul si et seulement si on a l'égalité $[(AC), (AF)] = [(BC), (BF)]$, or d'après le théorème 25, cette égalité est équivalente à l'appartenance de F au cercle circonscrit à ABC . Dans tous les cas de figures, on peut donc affirmer que l'orthocentre d'un triangle appartient à toute droite de Steiner d'un point quelconque de son cercle circonscrit.

A-5 Axe radical de de deux cercles coplanaires

5-1 Puissance d'un point par rapport à un cercle

Les notions qui suivent on pour but d'étudier l'hyperbole de Kiepert au paragraphe V-7-4.

DÉFINITION 15 *Étant donné un cercle \mathcal{C} de centre O et rayon r , on appelle puissance du point M par rapport à \mathcal{C} , le réel $p_{\mathcal{C}}(M) = OM^2 - r^2$.*

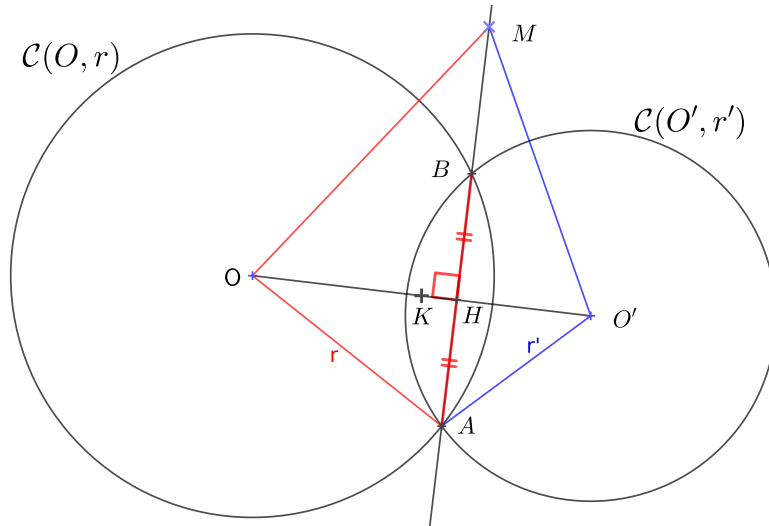
Il est aussi possible d'exprimer $p_{\mathcal{C}}(M)$ à l'aide d'un produit scalaire. Étant donné une droite d passant par M et sécante à \mathcal{C} en A et B , on montre en utilisant le milieu I de $[AB]$ et le théorème de Pythagore, que :

$$\begin{aligned} p_{\mathcal{C}}(M) &= \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}) \cdot (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}) \\ p_{\mathcal{C}}(M) &= \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = MI^2 - IA^2 = MO^2 - (IO^2 + IA^2) = MO^2 - r^2 \end{aligned}$$

On peut prolonger ce calcul et cette formule, dans le cas où la droite d est tangente au cercle en $A = B = I$. Cette notion est généralisable à l'espace de dimension 3 sans difficulté, et permet d'exprimer la notion de puissance d'un point par rapport à une sphère.

5-2 Définition de l'axe radical

DÉFINITION 16 *L'ensemble des points de même puissance par rapport à 2 cercles non concentriques est une droite perpendiculaire à la droite passant par leurs centres; cette droite est appelée axe radical des 2 cercles.*



Soit \mathcal{C}' est un deuxième cercle de centre O' et rayon r' , désignons par K le milieu de $[OO']$, on a les égalités équivalentes suivantes :

$$OM^2 - r^2 = O'M^2 - r'^2 \Leftrightarrow (\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{O'M})(\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{O'M}) = r^2 - r'^2$$

$$OM^2 - r^2 = O'M^2 - r'^2 \Leftrightarrow 2\overrightarrow{KM} \cdot \overrightarrow{O'O} = r^2 - r'^2$$

On obtient un point particulier de l'axe radical, en posant $M = H$ où H est le point de la droite (OO') tel que $\overrightarrow{KH} = \frac{r^2 - r'^2}{2OO'^2} \overrightarrow{O'O}$, tout autre point M de l'axe radical doit vérifier

$$2(\overrightarrow{KH} + \overrightarrow{HM}) = \overrightarrow{OO'} = r^2 - r'^2 \Leftrightarrow \overrightarrow{HM} \cdot \overrightarrow{OO'} = 0$$

il est donc nécessaire et suffisant que M soit sur la perpendiculaire à (OO') passant par H . Si deux cercles sont sécants en A et B , l'expression de $p_{\mathcal{C}}(M)$ et $p_{\mathcal{C}'}(M)$ pour tout $M \in (AB)$, à l'aide du produit scalaire $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB}$, montre que l'axe radical de ces 2 cercles, ne peut qu'être la droite (AB) , ou bien la tangente aux deux cercles en leur point de contact. Cela prouve que le point H évoqué plus haut est confondu avec le milieu I de $[AB]$. La notion d'axe radical permet de démontrer simplement le théorème suivant

5-3 Théorème de Monge

THÉORÈME 27 *Étant donné 3 cercles quelconques sécants deux à deux en deux points distincts, les 3 droites passant chacune par les points d'intersection de chaque paire de cercles, sont concourantes ou parallèles.*

Lorsque deux cercles sont tangents et n'ont qu'un seul point en commun, on obtient la même propriété en remplaçant la droite passant par deux points d'intersection par la tangente commune aux deux cercles.

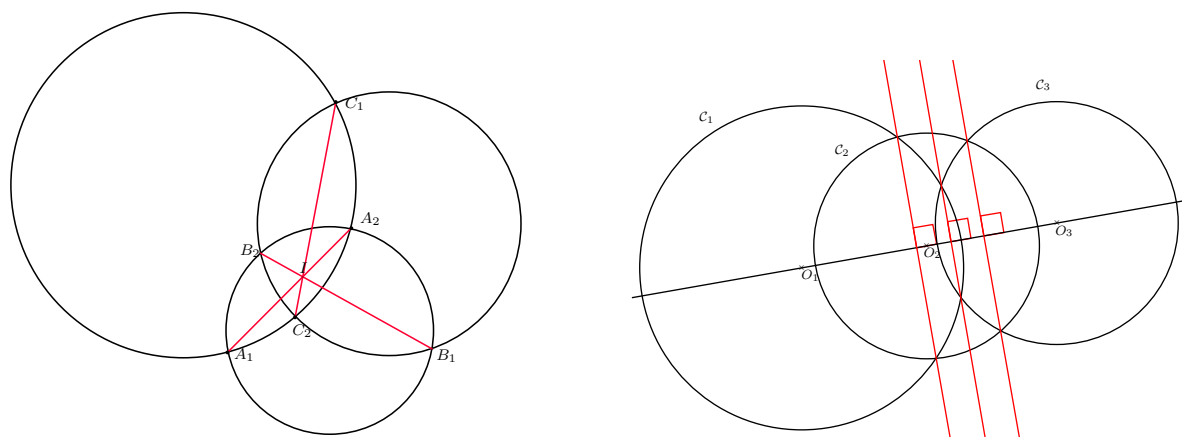


FIGURE A.6 – Illustration du théorème de Monge avec des axes radicaux concourants ou parallèles.

Il est évident que les droites en questions sont parallèles si et seulement si les centres des cercles sont alignés, sinon une preuve simple du théorème de Monge, s'appuie sur la notion d'axe radical. Si deux paires de cercles ont des axes radicaux sécants, le point d'intersection a même puissance par rapport aux 3 cercles, et se trouve donc être lui aussi sur l'axe radical de la troisième paire de cercles, on l'appelle centre radical des 3 cercles. Une illustration intéressante de la notion d'axe radical et du théorème de Monge, est la démonstration du théorème de Jacobi, qui nous sera utile dans l'étude de l'hyperbole de Kiepert (voir V-7-4)

5-4 Théorème de Jacobi

THÉORÈME 28 (THÉORÈME DE JACOBI) *Étant donné un triangle quelconque ABC , si on construit les trois triangles $A'BC$, $B'AC$ et $C'AB$ à l'aide de trois paires de droites dites isogonales par rapport aux côtés du triangle, en respectant ces 3 égalités entre angles de droites suivantes :*

- $[(AB), (AC')] = [(AB'), (AC)]$
- $[(BC), (BA')] = [(BC'), (BA)]$
- $[(CA), (CB')] = [(CA'), (CB)]$

alors les droites (AA') , (BB') et (CC') sont concourantes ou parallèles

Pour que les points A' , B' et C' soient définis, on suppose bien entendu que les angles de droites intervenant dans le théorème ne sont pas nuls. Nous allons montrer que les droites (AA') , (BB') et (CC') sont les axes radicaux des 3 cercles définis à l'aide de mesures d'angles de droites, par le procédé que nous avons proposé à la fin de la démonstration du théorème 25 page 152.

- Soit $\alpha = [(\widehat{AB}), (\widehat{AC'})] = [(\widehat{AB'}), (\widehat{AC})]$ et \mathcal{E}_1 le cercle qui contient les points du plan \mathcal{P} sous lesquels le bipoint (B, C) est vu sous un angle de droites de mesure α :

$$\mathcal{E}_1 = \{B, C\} \cup \left\{ M \in \mathcal{P} / [(\widehat{MB}), (\widehat{MC})] = \alpha \right\}$$

- Soit $\beta = [(\widehat{BC}), (\widehat{BA'})] = [(\widehat{BC'}), (\widehat{BA})]$ et \mathcal{E}_2 le cercle qui contient les points du plan \mathcal{P} sous lesquels le bipoint (C, A) est vu sous un angle de droites de mesure β :

$$\mathcal{E}_2 = \{C, A\} \cup \left\{ M \in \mathcal{P} / [(\widehat{MC}), (\widehat{MA})] = \beta \right\}$$

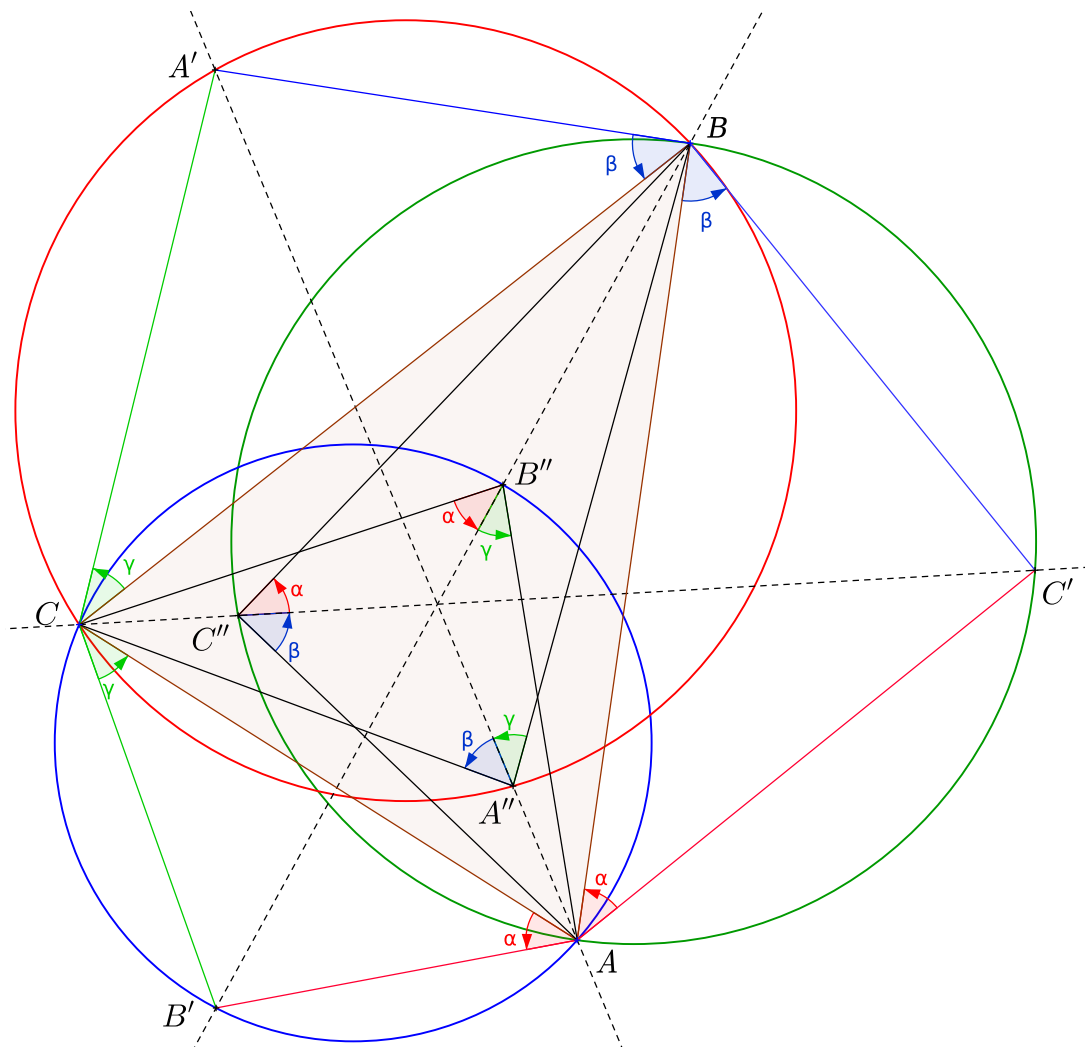


FIGURE A.7 – Sont représentés de la même couleur les angles de droites de même mesure obtenus à l'aide du théorème 25.

- Soit $\gamma = [(\widehat{CA}), (\widehat{CB'})] = [(\widehat{CA'}), (\widehat{CB})]$ et \mathcal{C}_3 le cercle qui contient les points du plan \mathcal{P} sous lesquels le bipoint (A, B) est vu sous un angle de droites de mesure γ :

$$\mathcal{C}_3 = \{A, B\} \cup \{M \in \mathcal{P} / [(\widehat{MA}), (\widehat{MB})] = \gamma\}$$

Pour montrer que les droites (AA') , (BB') et (CC') sont les axes radicaux des trois paires de cercles, prises parmi les trois cercles que nous venons de définir, considérons les 3 points $A'' \in (AA')$, $B'' \in (BB')$ et $C'' \in (CC')$ obtenus respectivement comme deuxième point d'intersection des droites (AA') , (BB') et (CC') avec trois autres cercles, ceux circonscrits aux triangles BCA' , ACB' et ABC' . Ces points d'intersection distincts de A' , B' et C' existent assurément, car les côtés d'un triangle ne peuvent pas être tangents au cercle circonscrit, mais A' , B' ou C' peuvent éventuellement être confondus avec A , B et C . Ces trois cercles circonscrits nous permettent d'écrire les égalités entre angles de droites ci-dessous, vérifiables sur sur la figure A.7.

$$\left\{ \begin{array}{l} [(\widehat{A''C}), (\widehat{A''A})] = [(\widehat{A''C}), (\widehat{A''A'})] = [(\widehat{BC}), (\widehat{BA'})] = \beta \\ [(\widehat{A''A}), (\widehat{A''B})] = [(\widehat{A''A'}), (\widehat{A''B})] = [(\widehat{CA'}), (\widehat{CB})] = \gamma \end{array} \right. \Rightarrow A'' \in \mathcal{C}_2 \cap \mathcal{C}_3$$

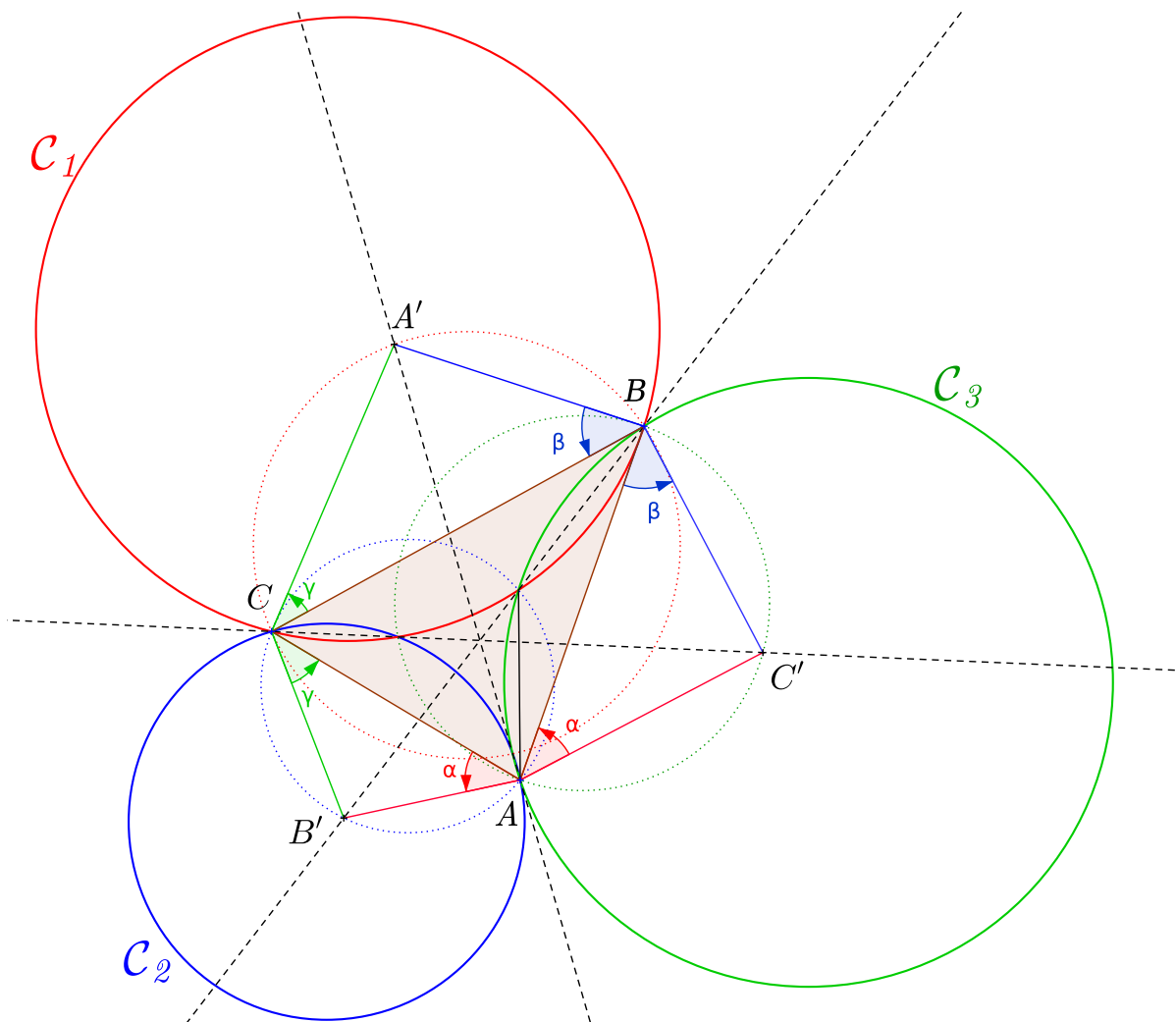


FIGURE A.8 – Axes radicaux des cercles \mathcal{C}_1 , \mathcal{C}_2 et \mathcal{C}_3 définis à l'aide des angles α , β et γ .

Puisque A est lui aussi un point commun à \mathcal{C}_2 et \mathcal{C}_3 , lorsque A'' est distinct de A , il apparaît que la droite (AA'') confondue avec (AA') est l'axe radical des cercles \mathcal{C}_2 et \mathcal{C}_3 . Si $A'' = A$, la droite (AA') est alors la tangente en A commune aux cercles \mathcal{C}_2 et \mathcal{C}_3 , (AA') est donc encore axe radical de ces deux cercles.

Sur le cercle circonscrit à CAB' , on a :

$$\begin{cases} [(B''A), (B''B)] = [(B''A), (B''B')] = [(CA), (CB')] = \gamma \\ [(B''B), (B''C)] = [(B''B'), (B''C)] = [(AB'), (AC)] = \alpha \end{cases} \Rightarrow B'' \in \mathcal{C}_3 \cap \mathcal{C}_1$$

Lorsque B'' est distinct de B , il apparaît que la droite (BB'') confondue avec (BB') est l'axe radical des cercles \mathcal{C}_3 et \mathcal{C}_1 . Les mêmes arguments que ceux utilisés pour la droite (AA') , permettent d'aboutir à cette même conclusion si $B = B''$.

Sur le cercle circonscrit à ABC' , on a :

$$\begin{cases} [(C''B)(C''C)] = [(C''B)(C''C')] = [(AB)(AC')] = \alpha \\ [(C''C)(C''A)] = [(C''C')(C''A)] = [(BC')(BA)] = \beta \end{cases} \Rightarrow C'' \in \mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2$$

Lorsque $C'' \neq C$, il apparait que droite (CC'') confondue avec (CC') est l'axe radical des cercles \mathcal{C}_1 et \mathcal{C}_2 ; lorsque $C = C''$, comme expliqué plus on aboutit à la même conclusion.

D'après le théorème de Monge appliqué aux cercles \mathcal{C}_1 , \mathcal{C}_2 et \mathcal{C}_3 , on en déduit que les droites (AA') , (BB') et (CC') sont concourantes ou parallèles.

Annexe B

Coordonnées barycentriques et initiation à la géométrie dans un plan projectif

B-1 Barycentre

Étant donné $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ et trois points A, B et C non alignés dans un espace affine \mathcal{E} de dimension nécessairement supérieure ou égale à 2, mais non précisée pour le moment, on pose le problème suivant : déterminer un point M tel que $\alpha \overrightarrow{MA} + \beta \overrightarrow{MB} + \gamma \overrightarrow{MC} = \vec{0}$. Étant donné un point $O \in \mathcal{E}$ quelconque, par relations de Chasles on obtient une équation équivalente $\alpha \overrightarrow{OA} + \beta \overrightarrow{OB} + \gamma \overrightarrow{OC} = (\alpha + \beta + \gamma) \overrightarrow{OM}$, on doit alors distinguer deux cas :

1-1 1^{er} cas : $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$

l'équation de départ est équivalente à $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{\alpha + \beta + \gamma} (\alpha \overrightarrow{OA} + \beta \overrightarrow{OB} + \gamma \overrightarrow{OC})$, le point M obtenu en translatant le point O par le vecteur $\frac{1}{\alpha + \beta + \gamma} (\alpha \overrightarrow{OA} + \beta \overrightarrow{OB} + \gamma \overrightarrow{OC})$ est donc solution du problème posé. Cette solution est unique et ne dépend pas du point O choisi arbitrairement, car si M_1 et M_2 vérifient $\begin{cases} \alpha \overrightarrow{M_1 A} + \beta \overrightarrow{M_1 B} + \gamma \overrightarrow{M_1 C} = \vec{0} \\ \alpha \overrightarrow{M_2 A} + \beta \overrightarrow{M_2 B} + \gamma \overrightarrow{M_2 C} = \vec{0} \end{cases}$, par soustraction membres à membres on obtient $\alpha \overrightarrow{M_1 M_2} + \beta \overrightarrow{M_1 M_2} + \gamma \overrightarrow{M_1 M_2} = (\alpha + \beta + \gamma) \overrightarrow{M_1 M_2} = \vec{0}$ qui montre que nécessairement $M_1 = M_2$. En particulier, si O coïncide avec le point A , on peut affirmer que la solution unique au problème de départ est le point dont les coordonnées cartésiennes dans le repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ sont $(\frac{\beta}{\alpha + \beta + \gamma}; \frac{\gamma}{\alpha + \beta + \gamma})$, il est donc coplanaires avec les points A, B , et C , d'où l'illustration de sa construction dans la figure B obtenue avec GEOGEBRA.

On a construit la somme vectorielle $\alpha \overrightarrow{OA} + \beta \overrightarrow{OB} + \gamma \overrightarrow{OC}$, représentée par le bipoint (O, M') . Puisque le point M recherché doit être dans le plan (ABC) et aligné avec O et M' , on peut l'obtenir à l'intersection de ce plan avec la droite (OM') , à condition que celle ci soit sécante avec (ABC) . On obtient à coup sur une intersection réduite à un seul point, en «sortant» du plan (ABC) pour se placer dans un sous-espace affine de \mathcal{E} engendré par les 4 points A, B, C et $O \notin (ABC)$. On peut télécharger le fichier geogebra à l'URL indiquée en légende, pour vérifier

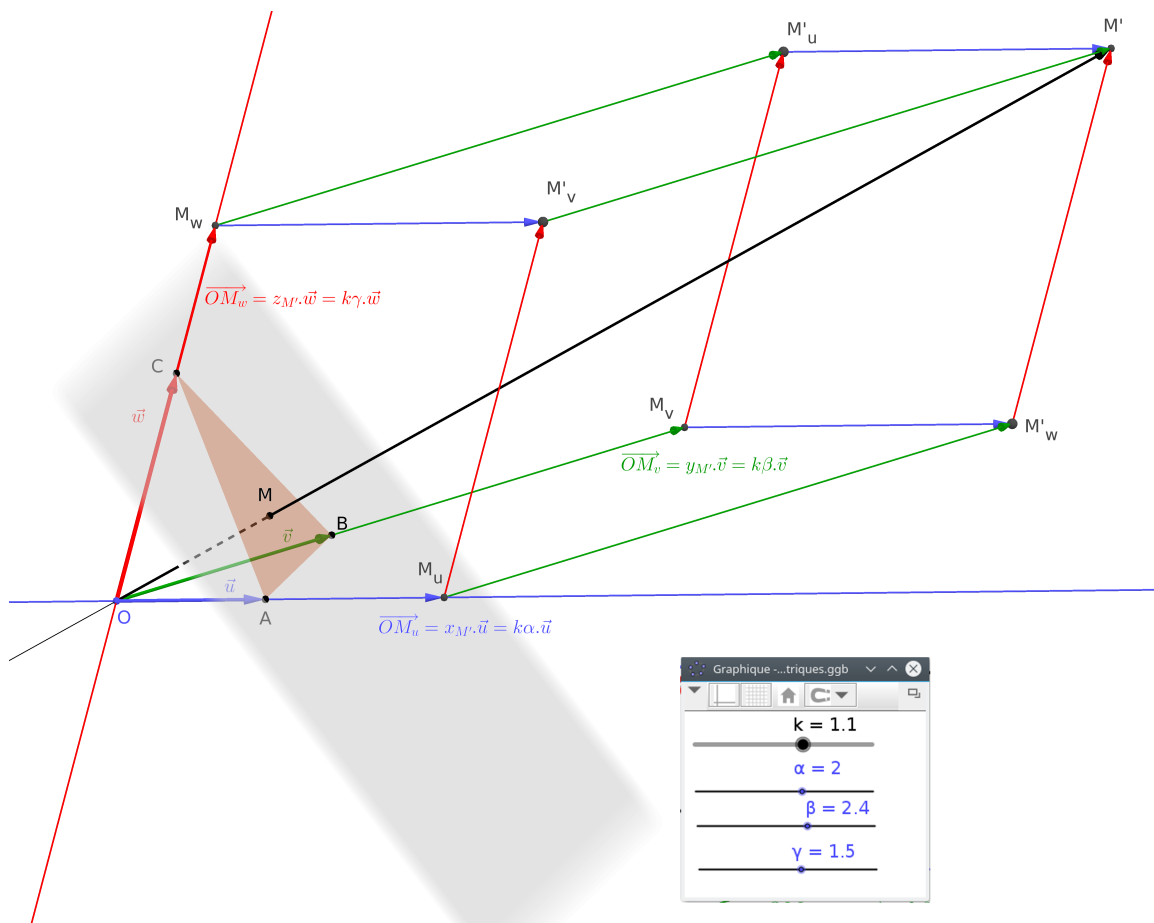


FIGURE B.1 – Les coordonnées cartésiennes de M' dans $(O, \vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ sont des coordonnées barycentriques de M dans (A, B, C)

expérimentalement qu'une fois A, B et C fixés, M est parfaitement défini et ne bouge pas si on déplace le point O .

1-2 2^e cas : $\alpha + \beta + \gamma = 0$

Avec cette hypothèse $\alpha = -\beta - \gamma$, et par conséquent $\alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB} + \gamma\overrightarrow{MC} = \beta(\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MA}) + \gamma(\overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MA}) = \beta\overrightarrow{AB} + \gamma\overrightarrow{AC}$, on obtient donc un vecteur indépendant du point M qui appartient à l'espace vectoriel qui dirige le plan affine (ABC) . Ce vecteur ne peut être nul, qu'à la condition que $\alpha = \beta = \gamma = 0$, car $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ est une base du plan vectoriel qui dirige (ABC) .

B-2 Construction du plan projectif

2-1 Points d'un plan assimilés à des droites d'un espace à 3 dimensions

Nous venons d'effectuer le premier pas vers la géométrie dans un plan projectif, en nous plongeant dans un espace de dimension 3 en vue d'obtenir des résultats dans un plan de dimen-

sion 2. Dans le paragraphe précédent, lorsque le triplet $(\alpha; \beta; \gamma)$ est tel que $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$, nous avons défini un unique point M du plan (ABC) , dont le triplet $(\alpha; \beta; \gamma)$ est appelé coordonnées barycentriques de M dans le repère affine ou référentiel (A, B, C) . Tout point du plan (ABC) a des coordonnées barycentriques, à commencer par ses coordonnées cartésiennes dans le repère $(O, \vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ où l'on a posé $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{v} = \overrightarrow{OB}$ et $\vec{w} = \overrightarrow{OC}$; mais elles ne sont pas uniques, elles sont définies à un coefficient de proportionnalité prêt. Si à la place du point M' dans la figure B.1, nous avons un point de coordonnées $(k\alpha; k\beta; k\gamma)$ avec $k \neq 0$, tous ces triplets de coordonnées barycentriques détermineraient la même droite et on obtiendrait par conséquent, le même point M à l'intersection avec le plan (ABC) . Le triplet (x_M, y_M, z_M) de coordonnées cartésiennes du point M dans le repère $(O, \vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est un cas particulier de coordonnées barycentriques dans le repère affine (A, B, C) , qui vérifie l'équation du plan (ABC) dans le repère $(O, \vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$: $x + y + z = 1$. C'est le seul triplet de coordonnées barycentriques de M à avoir la somme de ses termes égale à 1, des coordonnées barycentriques qui ont cette particularité sont appelées coordonnées barycentriques normalisées. Dans la figure sous GEOGEBRA ci-dessus, on peut expérimenter tout ceci en modifiant la position du point M' dans le repère $(O, \vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$, à l'aide des curseurs α, β, γ et k . On peut déplacer le point O en le laissant à l'extérieur du plan (ABC) et modifier la valeur de k , on constate que le point M garde la même position.

Étant donné un point O extérieur au plan (ABC) , à tout point M de ce plan on peut associer la droite (OM) , on peut caractériser ce point ou bien la droite associée par la classe d'équivalence des coordonnées barycentriques de M dans le repère (A, B, C) . Cette classe d'équivalence est constituée des triplets de coordonnées cartésiennes de tous les points de la droite (OM) , excepté le point O . C'est un élément de l'ensemble $\mathcal{P} = \mathbb{R}^3 \setminus \{(0; 0; 0)\} / \mathcal{R}$, quotient de l'ensemble $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ auquel on a ôté le triplet $(0; 0; 0)$, par la relation d'équivalence \mathcal{R} telle que :

$(a, b, c) \mathcal{R} (a', b', c')$ si et seulement si il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que $(a, b, c) = (ka', kb', kc')$

$$(a, b, c) \mathcal{R} (a', b', c') \Leftrightarrow \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b & c \\ b' & c' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c & a \\ c' & a' \end{vmatrix} = 0$$

le réel k est nécessairement non nul, puisqu'il s'agit d'exprimer une relation entre éléments de \mathbb{R}^3 privé de $(0; 0; 0)$. Il faut insister sur le fait que nous devons avoir trois déterminants nuls,

on peut très bien avoir $\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c & a \\ c' & a' \end{vmatrix} = 0$ dès que $a = a' = 0$, mais $(b; c)$ n'est pas proportionnel à $(b'; c')$ si $\begin{vmatrix} b & c \\ b' & c' \end{vmatrix}$ est différent de 0.

Notons \mathcal{E}_3 l'espace affine de dimension 3 qui contient $\{O, A, B, C\}$, \mathcal{E}_2 le plan affine qui contient $\{A, B, C\}$, puis considérons l'ensemble \mathcal{F}_O , faisceau de droites passant par O , dont les éléments sont toutes les droites de l'espace affine \mathcal{E}_3 passant par O , l'application $f : \mathcal{E}_2 \rightarrow \mathcal{F}_O$ est injective. Nous pouvons mettre ainsi tous les points du plan (ABC) , $M \mapsto (OM)$

en bijection avec le sous-ensemble de toutes les droites de \mathcal{E}_3 passant par O non parallèles à \mathcal{E}_2 , ces deux ensembles peuvent être mis en bijection par l'intermédiaire des coordonnées barycentriques, avec un sous-ensemble de \mathcal{P} constitué des classes de triplets dont la somme des termes n'est pas nulle.

Il apparaît donc que $\mathcal{P} = \mathbb{R}^3 \setminus \{(0; 0; 0)\} / \mathcal{R}$ est une extension de \mathcal{E}_2 , qui contient en plus des éléments que nous ne pouvons pas associer à des points de \mathcal{E}_2 , ou une droite de \mathcal{E}_3 ; nous allons voir comment interpréter géométriquement ces éléments supplémentaires. Dans l'espace \mathcal{E}_3 , il existe aussi des droites de \mathcal{F}_O auxquelles ne sont associées aucun point du plan \mathcal{E}_2 , il s'agit de toutes les droites de \mathcal{F}_O parallèles à \mathcal{E}_2 , chacune de celles-ci caractérise une classe de vecteurs non nuls colinéaires entre eux qui appartiennent au sous espace vectoriel de dimension 2 qui dirige \mathcal{E}_2 . Ces vecteurs sont exactement ceux qu'on retrouve lorsque $\alpha + \beta + \gamma = 0$, et que l'on calcule le vecteur $\vec{u} = \alpha\vec{MA} + \beta\vec{MB} + \gamma\vec{MC}$ qui est indépendant de M . On savait déjà qu'on ne peut aboutir à un point M de \mathcal{E}_2 avec des coordonnées barycentriques qui vérifieraient $\alpha + \beta + \gamma = 0$, mais on peut associer à la classe d'équivalence des triplets de la forme $(k\alpha; k\beta; k\gamma)$ avec $k \in \mathbb{R}^*$, l'unique droite vectorielle dirigée par $\vec{u} = \beta\vec{AB} + \gamma\vec{AC} = \alpha\vec{BA} + \gamma\vec{BC} = \alpha\vec{CA} + \beta\vec{CB}$. L'ensemble $\mathcal{P} = \mathbb{R}^3 \setminus \{(0; 0; 0)\} / \mathcal{R}$ au complet peut donc être mis en bijection avec $\mathcal{E}_2 \cup \mathcal{D}_\infty$, où \mathcal{D}_∞ désigne l'ensemble des droites vectorielles du plan vectoriel qui dirige \mathcal{E}_2 . Toute droite vectorielle élément de \mathcal{D}_∞ est dirigée par un vecteur que l'on peut écrire sous la forme $x\vec{AB} + y\vec{AC}$, elle pourra être considérée comme un élément de coordonnées barycentriques $k(x; y; -x - y)$ dans le référentiel (A, B, C) , que nous appellerons point à l'infini.

Toute droite affine d constituée de points de \mathcal{E}_2 pourra ainsi être complétée ou prolongée en une droite projective $\bar{d} = d \cup \{\overrightarrow{Ru}\}$, obtenue en lui adjoignant son point à l'infini symbolisé par le sous-espace vectoriel $\overrightarrow{Ru} \in \mathcal{D}_\infty$, où \vec{u} désigne un vecteur directeur de la droite d . Le terme \overrightarrow{Ru} est censé représenter le point à l'infini qu'ont en commun toutes les droites parallèles à d , on peut aussi imaginer qu'il s'agit de la droite passant par O et parallèle à d , constituée de O et tous les points X tels que \overrightarrow{OX} dirige d . On vient de créer une nouvelle façon de faire de la géométrie dans le plan contenant les points A, B et C , où les nouveaux objets que nous appellerons points doivent être pensés comme des droites de l'espace de dimension 3 en géométrie classique, qui passent toutes par un même point O fixé à l'extérieur de ce plan. Les nouveaux objets appelés droites doivent être pensés et imaginés comme des plans passant tous par ce même point O extérieur au plan (ABC) , ces nouvelles droites peuvent être de deux types :

- $\bar{d} = d \cup \{\overrightarrow{Ru}\}$ où d est une droite contenue dans \mathcal{E}_2 et \vec{u} est un vecteur directeur de d , cette nouvelle droite peut être représentée par le plan passant par O et d ,
- l'unique droite \mathcal{D}_∞ représentée par le plan parallèle à \mathcal{E}_2 passant par O , on l'appelle droite de l'infini car ses éléments sont tous les points à l'infini de chaque droite du type précédent.

Pour lever certaines ambiguïtés, dans un premier temps nous appellerons droite projective ou droite projective complétée les éléments de ce sous-ensemble des parties de notre plan projectif, et à l'opposé nous préciserons droite affine pour désigner la droite projective « amputée » de son point à l'infini. Dans le plan projectif, l'axiome qui affirme que par deux points, il passe une unique droite (sous entendu projective) est toujours vérifié.

- Pour deux points M et N qui ne sont pas dans \mathcal{D}_∞ , il est clair qu'il s'agit de la droite projective \overrightarrow{MN} qui contient la droite classique (MN) et son point à l'infini \overrightarrow{RMN} .
- La droite qui passe par un point A à distance finie (ie : n'appartenant pas à \mathcal{D}_∞) et le point $\overrightarrow{Ru} \in \mathcal{D}_\infty$ est tout simplement la droite projective \bar{d} , où d est la droite affine passant par A dirigée par \vec{u} .
- L'unique droite qui passe par deux points distincts à l'infini ne peut être que \mathcal{D}_∞ .

Des droites projectives complétées \bar{d}_1 et \bar{d}_2 seront dites parallèles si et seulement si $d_1 // d_2$,

autrement dit elles ont en commun un unique même point à l'infini $R\vec{u}$, où \vec{u} est un vecteur qui dirige ces deux droites. Selon ces définitions, deux droites projectives complétées distinctes d'un plan projectif ont toujours un unique point en commun, même si elles sont parallèles. Mais pour préserver la transitivité du parallélisme dans l'ensemble des droites projectives complétées du plan projectif, nous décréterons que \mathcal{D}_∞ n'est parallèle à aucune autre droite projective, sinon elle-même. Ceci met en défaut l'axiome d'Euclide, car si une droite affine d n'est pas elle-même dirigée par \vec{u} , par le point à l'infini $R\vec{u}$ ne passe aucune droite projective parallèle à \vec{d} .

2-2 Coordonnées barycentriques d'un milieu

Dans le plan projectif tel que nous l'avons conçu dans le paragraphe précédent en le plongeant dans un espace affine de dimension 3, soient A, B et C des points non alignés à distance finie; (A, B, C) constitue un repère affine du plan affine contenant ces trois points, nous dirons qu'il s'agit d'un référentiel du plan projectif obtenu en complétant le plan affine par des points à l'infini. Pour les puristes signalons que ce référentiel n'est pas un repère du plan projectif, la notion de repère d'un espace projectif de dimension n exige qu'il ait $n + 2$ points, bien qu'un élément d'un espace projectif, admette seulement $n + 1$ coordonnées dans un repère de cet espace, qu'on appelle coordonnées homogènes¹. Nous n'utiliserons exclusivement ici, que des coordonnées affines barycentriques dans un référentiel (A, B, C) , pour exprimer des triplets de coordonnées homogènes dans le repère projectif (A, B, C, G) , où G est l'isobarycentre des points à distance finie A, B et C .

Étant donné deux points M et N de coordonnées barycentriques (x_M, y_M, z_M) et (x_N, y_N, z_N) dans le repère affine ou référentiel (A, B, C) , les points M et N ont pour coordonnées cartésiennes dans le repère $(O, \vec{OA}, \vec{OB}, \vec{OC})$,

$$\frac{1}{x_M + y_M + z_M} (x_M, y_M, z_M) \quad \text{et} \quad \frac{1}{x_N + y_N + z_N} (x_N, y_N, z_N)$$

Leur milieu I a donc pour coordonnées cartésiennes dans ce même repère :

$$\frac{1}{2(x_M + y_M + z_M)} (x_M, y_M, z_M) + \frac{1}{2(x_N + y_N + z_N)} (x_N, y_N, z_N)$$

Ce milieu admet donc les coordonnées barycentriques équivalentes suivantes dans le référentiel (A, B, C) :

$$(x_N + y_N + z_N)(x_M, y_M, z_M) + (x_M + y_M + z_M)(x_N, y_N, z_N)$$

La situation la plus favorable est de disposer de coordonnées barycentriques de même somme, ce qui est évidemment le cas si on a dispose de coordonnées normalisées pour les deux points, dans ces conditions, il suffit en effet d'effectuer la somme de ces coordonnées pour obtenir des coordonnées du milieu, équivalentes aux deux solutions possibles que nous venons de donner.

1. Ne pas attacher d'importance à cette phrase si elle vous paraît obscure, elle est là pour éviter aux spécialistes de géométrie projective de s'arracher les cheveux, il ne s'agit ici que d'une initiation aux théories projectives, pour un approfondissement de ces notions, voir [5].

2-3 Équation de droite dans un plan projectif

Soit (A, B, C) un référentiel du plan projectif, auquel on peut associer le repère cartésien $(O, \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC})$ où O est un point extérieur au plan affine qui contient $\{A, B, C\}$. L'ensemble des points de droite (MN) contenue dans le plan affine (ABC) peut être mise en bijection avec l'ensemble des droites du plan (OMN) passant par O , auquel on doit ôter la droite d parallèle à (MN) passant par O , cela nous permet d'assimiler les points de (MN) à des droites de l'espace de dimension 3. La droite d peut être interprétée comme le point à l'infini du nouvel objet géométrique (\overline{MN}) que nous avons appelé droite projective, car ce point à l'infini est une droite vectorielle, constituée de tous les vecteurs \overrightarrow{OX} où X appartient à la droite d . Tout point P du plan (OMN) admet un unique triplet de coordonnées cartésiennes dans le repère $(O, \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC})$,

- si $P \in d$, ses coordonnées cartésiennes sont celles d'un vecteur colinéaire à \overline{MN} , ce sont des coordonnées barycentriques du point à l'infini adjoint à la droite (MN)
- si $P \notin d$, ses coordonnées cartésiennes sont des coordonnées barycentriques du point d'intersection de (OP) avec le plan (ABC) .

Dans le repère cartésien $(O, \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC})$, un plan \mathcal{P} passant par O admet une équation de la forme $ax + by + cz = 0$; si de plus nous munissons l'espace affine de dimension 3 d'une structure euclidienne telle que $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC})$ soit une base orthonormale, on peut affirmer que le plan \mathcal{P} d'équation cartésienne $ax + by + cz = 0$ est le plan affine passant par O , orthogonal au vecteur $a\overrightarrow{OA} + b\overrightarrow{OB} + c\overrightarrow{OC}$. Pour que le plan \mathcal{P} soit sécant avec (ABC) , il faut que les coordonnées (a, b, c) ne soient pas proportionnelles à $(1, 1, 1)$, car (ABC) et \mathcal{P} ne peuvent pas avoir la même direction orthogonale. Cette dernière remarque signifie que les coefficients a, b et c ne sont pas tous égaux entre eux, une équation du type $ax + by + cz = 0$ ayant cette propriété est donc aussi l'équation d'une droite projective en coordonnées barycentriques, dans un plan projectif admettant (A, B, C) pour référentiel. Des coordonnées barycentriques d'un vecteur directeur ou point à l'infini de cette droite peuvent être retrouvées, à l'aide du produit vectoriel² des deux vecteurs $\vec{u} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$ orthogonal à (ABC) et $\vec{v} = a\overrightarrow{OA} + b\overrightarrow{OB} + c\overrightarrow{OC}$ orthogonal à \mathcal{P} :

$$(\overrightarrow{aOA} + \overrightarrow{bOB} + \overrightarrow{cOC}) \wedge (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) = (b - c)\overrightarrow{OA} + (c - a)\overrightarrow{OB} + (a - b)\overrightarrow{OC}$$

$$(\overrightarrow{aOA} + \overrightarrow{bOB} + \overrightarrow{cOC}) \wedge (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) = a\overrightarrow{BC} + b\overrightarrow{CA} + c\overrightarrow{AB}$$

Ce vecteur dirige bien l'intersection des deux plans, puisque c'est un vecteur non nul qui est orthogonal à \vec{u} et \vec{v} . Il est très simple de le vérifier, en remarquant d'abord que s'il était nul on aurait $a = b = c$ et $\mathcal{P} \cap (ABC) = \emptyset$, puis en constatant que ses coordonnées vérifient les équations cartésiennes de \mathcal{P} et du plan vectoriel qui dirige (ABC) :

$$(b - c) + (c - a) + (a - b) = 0 \quad \text{et} \quad a(b - c) + b(c - a) + c(a - b) = 0$$

- **Dans un plan projectif qui admet (A, B, C) pour référentiel, toute droite projective distincte de \mathcal{D}_∞ admet donc une équation barycentrique dans ce référentiel de la forme $ax + by + cz = 0$ avec au moins deux réels distincts parmi a, b et c . Son**

2. Pour le lecteur non informé de la notion de produit vectoriel, il suffit de constater que le produit vectoriel défini par cette égalité $(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}) \wedge (x'\vec{i} + y'\vec{j} + z'\vec{k}) = (yz' - y'z)\vec{i} + (x'z - xz')\vec{j} + (xy' - x'y)\vec{k}$ fournit un vecteur orthogonal à $x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ et $x'\vec{i} + y'\vec{j} + z'\vec{k}$.

point à l'infini a pour coordonnées barycentriques $(b - c, c - a, a - b)$ **et elle est dirigée par le vecteur** $a\overrightarrow{BC} + b\overrightarrow{CA} + c\overrightarrow{AB} \neq \vec{0}$.

- **La droite \mathcal{D}_∞ admet l'équation** $x + y + z = 0$.

Étant donné deux points distincts $M(x_M, y_M, z_M)$ et $N(x_N, y_N, z_N)$ du plan projectif (éventuellement à l'infini) désignés par leur coordonnées barycentriques dans le référentiel (A, B, C) , nous venons de voir qu'une équation en coordonnées barycentriques de la droite projective (MN) est aussi une équation en coordonnées cartésiennes du plan (OMN) dans le repère $(O, \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC})$. Ce dernier plan admet pour vecteur orthogonal le produit vectoriel

$$\overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{ON} = \begin{vmatrix} y_M & z_M \\ y_N & z_N \end{vmatrix} \overrightarrow{OA} - \begin{vmatrix} x_M & z_M \\ x_N & z_N \end{vmatrix} \overrightarrow{OB} + \begin{vmatrix} x_M & y_M \\ x_N & y_N \end{vmatrix} \overrightarrow{OC}$$

On obtient ainsi une équation cartésienne avec des coefficients non tous nuls, du plan (OMN) assimilé à la droite projective (MN) :

$$0 = (y_M z_N - y_N z_M)x + (x_N z_M - x_M z_N)y + (x_M y_N - x_N y_M)z = \begin{vmatrix} x_M & y_M & z_M \\ x_N & y_N & z_N \\ x & y & z \end{vmatrix}$$

Les trois coefficients calculés sous forme de déterminants 2×2 ne peuvent être tous les trois nuls, sinon les points projectifs N et M avec des coordonnées barycentriques proportionnelles seraient confondus. En écrivant cette équation barycentrique sous la forme d'un déterminant 3×3 , il devient possible de constater très simplement que l'équation est vérifiée si on remplace (x, y, z) par (x_M, y_M, z_M) ou (x_N, y_N, z_N) , puisque le déterminant 3×3 à calculer aura alors deux lignes égales. Cette façon d'écrire l'équation de (MN) signifie que les vecteurs \overrightarrow{OM} , \overrightarrow{ON} et $x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ sont liés, ce qui signifie comme nous le voulions, que le point de coordonnées cartésiennes (x, y, z) est dans le plan (OMN) .

On peut constater que lorsque M et N sont deux points à l'infini distincts, dont les coordonnées barycentriques vérifient $x_M + y_M + z_M = x_N + y_N + z_N = 0$, en additionnant les deux premières colonnes du déterminant à la dernière, on obtient une équation barycentrique de la

droite projective qui passe par M et N , équivalente à $k(x + y + z) = 0$ avec $k = \begin{vmatrix} x_M & y_M \\ x_N & y_N \end{vmatrix} \neq 0$.

On retrouve la droite \mathcal{D}_∞ dont l'équation est aussi de la forme générale $ax + by + cz = 0$, mais avec de plus la condition $a = b = c$.

Cette initiation rapide aux théories projectives nous suffira au paragraphe V-3, pour expliquer aussi comment obtenir des équations d'une conique en coordonnées barycentriques. Le but de cette initiation est de faire intervenir les points à l'infini qu'une conique prolongée dans le plan projectif est susceptible de contenir :

- aucun pour une ellipse ;
- un unique pour une parabole ;
- deux distincts pour une hyperbole.

Cela nous fournira un moyen très commode pour distinguer les types de coniques intervenant dans certaines situations.

B-3 Interprétation des coordonnées barycentriques

3-1 Associativité de la construction du barycentre

Étant donné le référentiel (A, B, C) d'un plan projectif, si $\alpha + \beta \neq 0$, le barycentre de (A, α) , (B, β) et $(C, 0)$ est le point N tel que $\alpha \overrightarrow{NA} + \beta \overrightarrow{NB} = \vec{0}$, on peut le définir tout simplement comme barycentre des deux points (A, α) et (B, β) en faisant abstraction de C . Il vérifie $(\alpha + \beta) \overrightarrow{ON} = \alpha \overrightarrow{OA} + \beta \overrightarrow{OB}$ quelque soit le point O . Si O est en particulier le barycentre M des trois points (A, α) , (B, β) et (C, γ) , on a $\alpha \overrightarrow{MA} + \beta \overrightarrow{MB} + \gamma \overrightarrow{MC} = (\alpha + \beta) \overrightarrow{MN} + \gamma \overrightarrow{MC} = \vec{0}$, cette égalité montre que M est le barycentre de $(N, \alpha + \beta)$ et (C, γ) . Il suffit donc de savoir construire le barycentre de deux points pour pouvoir construire de proche en proche le barycentre de 3 points et plus.

3-2 Coordonnées barycentriques exprimées par des aires

Soit (A, B, C) un repère affine d'un plan et M un point à l'intérieur au sens strict d'un triangle non aplati ABC , soit A' l'intersection du segment $[BC]$ et de la droite (AM) . Les triangles $A'MB$ et $A'MC$ ont même hauteur issue de M , leurs aires positives sont donc proportionnelles aux longueurs $A'B$ et $A'C$, en posant $x_1 = \text{Aire}(A'MB)$ et $y_1 = \text{Aire}(A'MC)$ on a $\frac{x_1}{A'B} = \frac{y_1}{A'C}$. De même en posant $x_2 = \text{Aire}(A'AB)$ et $y_2 = \text{Aire}(A'AC)$, on obtient $\frac{x_2}{A'B} = \frac{y_2}{A'C}$. Posons $y_2 - y_1 = \text{Aire}(MAC) = \beta$ et $x_2 - x_1 = \text{Aire}(MAB) = \gamma$. De ces égalités nous pouvons déduire que $\frac{A'B}{A'C} = \frac{x_1}{y_1} = \frac{x_2}{y_2} = \frac{x_2 - x_1}{y_2 - y_1}$, ce qui prouve que $\frac{\beta}{A'C} = \frac{\gamma}{A'B}$ et que $\overrightarrow{\gamma A'C}$ et $\overrightarrow{\beta A'B}$ ont même norme. Puisque ces vecteurs sont colinéaires et de sens contraire ils vérifient l'égalité $\beta \overrightarrow{A'B} + \gamma \overrightarrow{A'C} = \vec{0}$, il apparait ainsi que A' est barycentre de (B, β) et (C, γ) .

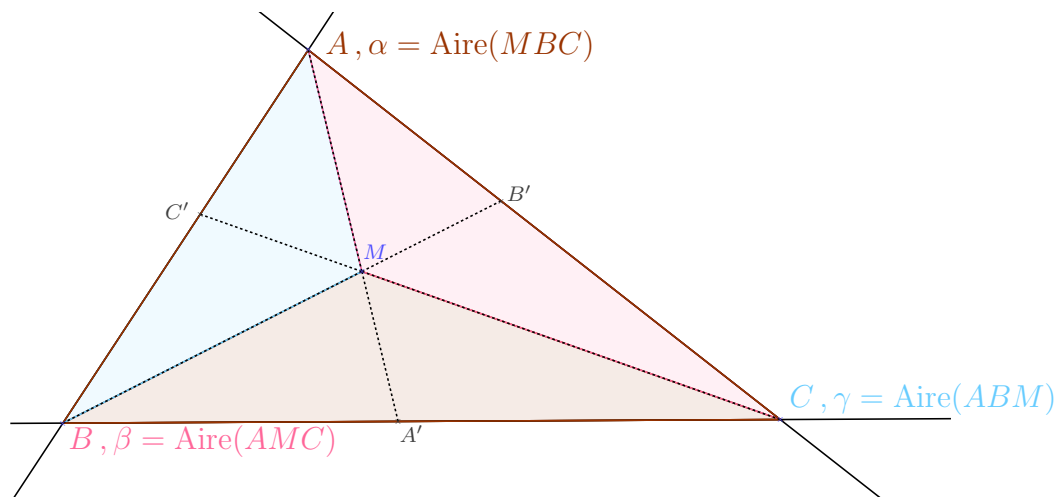


FIGURE B.2 – Coordonnées barycentriques de M à l'intérieur du triangle ABC

De même, en posant $\alpha = \text{Aire}(MBC)$ et en désignant par B' le point d'intersection du segment $[AC]$ et de la droite (BM) , on montre que ce point est barycentre de (A, α) et (C, γ) . D'après l'associativité de la construction du barycentre expliquée plus haut, le barycentre de (A, α) , (B, β) et (C, γ) doit être sur les segments $[AA']$ et $[BB']$, il s'agit donc du point M .

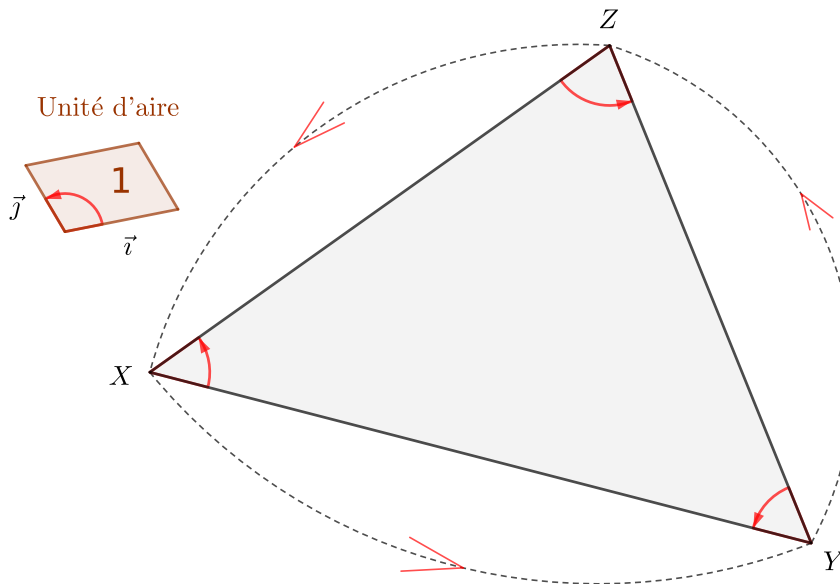
Lorsque M est à l'intérieur du triangle ABC comme sur la figure B.2, on peut donc affirmer que tout triplet de coordonnées barycentriques de ce point est proportionnel à :

$$(Aire(MBC), Aire(AMC), Aire(ABM))$$

Le concept d'aire est une notion affine qui ne nécessite pas de structure euclidienne, à laquelle nous avons pourtant fait allusion plus haut en évoquant la hauteur des triangles. En fait, si on convient que l'unité d'aire est celle d'un parallélogramme dont les côtés servent à définir une base (\vec{i}, \vec{j}) du plan, l'aire d'un triangle s'obtient à l'aide du calcul d'un déterminant dans cette base, sans intervention de la moindre notion d'angle ou distance entre deux points. Par exemple, les aires des triangles MBC , AMC et ABM sont la moitié des déterminants suivants :

$$\det(\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MC}) \quad \det(\overrightarrow{MC}, \overrightarrow{MA}) \quad \det(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB})$$

Lorsqu'on calcule ces déterminants, il faut être attentif à l'ordre dans lequel sont désignés les 2 vecteurs, puisque leur permutation change le signe du résultat. Lorsque le point M est à l'intérieur du triangle, les trois déterminants que nous venons d'affecter à M comme coordonnées barycentriques doivent être de même signe ; c'est pour cela que l'ordre des vecteurs dans l'énoncé des déterminants ci-dessus, a été choisi de manière que les bases $(\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MC})$, $(\overrightarrow{MC}, \overrightarrow{MA})$ et $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB})$ soient de même orientation. Il faut donc convenir de l'affectation d'un signe pour calculer une aire, que nous qualifierons d'aire algébrique et que nous conviendrons de noter $\Delta(XYZ)$, on a donc :



$$\Delta(XYZ) = \frac{1}{2} \det_{(\vec{i}, \vec{j})}(\overrightarrow{XY}, \overrightarrow{XZ}) = \frac{1}{2} \det_{(\vec{i}, \vec{j})}(\overrightarrow{YZ}, \overrightarrow{YX}) = \frac{1}{2} \det_{(\vec{i}, \vec{j})}(\overrightarrow{ZX}, \overrightarrow{ZY})$$

Ce réel a donc pour valeur absolue l'aire du triangle évaluée positivement, et son signe dépend de l'orientation de la base $(\overrightarrow{XY}, \overrightarrow{XZ})$. Par exemple, si on «tourne» dans un sens convenu positif pour désigner dans cet ordre les points X , Y et Z , nous conviendrons que les réels suivants obtenus en effectuant une permutation circulaire des sommets du triangle XYZ sont positifs, les trois autres permutations donneront le résultat opposé :

$$\Delta(XYZ) = \Delta(YZX) = \Delta(ZXY) > 0 \quad , \quad \Delta(XZY) = \Delta(ZYX) = \Delta(YXZ) < 0$$

Une base unité étant fixée pour calculer les déterminants, nous allons expliquer et vérifier que dans toutes les situations, même lorsque le point M n'est pas à l'intérieur du triangle, $(\Delta(MBC), \Delta(AMC), \Delta(ABM))$ est un triplet de coordonnées barycentriques du point M dans le référentiel (A, B, C) . En effet, lorsque M est barycentre de (A, α) , (B, β) et (C, γ) , on a $\alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB} + \gamma\overrightarrow{MC} = \vec{0}$ et $\det(\overrightarrow{MA}, \alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB} + \gamma\overrightarrow{MC}) = 0$. On en déduit : $\beta \cdot \det(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = \gamma \cdot \det(\overrightarrow{MC}, \overrightarrow{MA})$. Le couple (β, γ) est donc proportionnel au couple $(\det(\overrightarrow{MC}, \overrightarrow{MA}), \det(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}))$, de même, $\det(\alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB} + \gamma\overrightarrow{MC}, \overrightarrow{MB}) = 0$ nous permet d'obtenir : $\alpha \cdot \det(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = \gamma \cdot \det(\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MC})$. Le couple (α, γ) est donc proportionnel au couple $(\det(\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MC}), \det(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}))$, et finalement le triplet de coordonnées barycentriques (α, β, γ) est proportionnel au triplet :

$$\left(\det(\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MC}), \det(\overrightarrow{MC}, \overrightarrow{MA}), \det(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) \right) = (2\Delta(MBC), 2\Delta(AMC), 2\Delta(ABM))$$

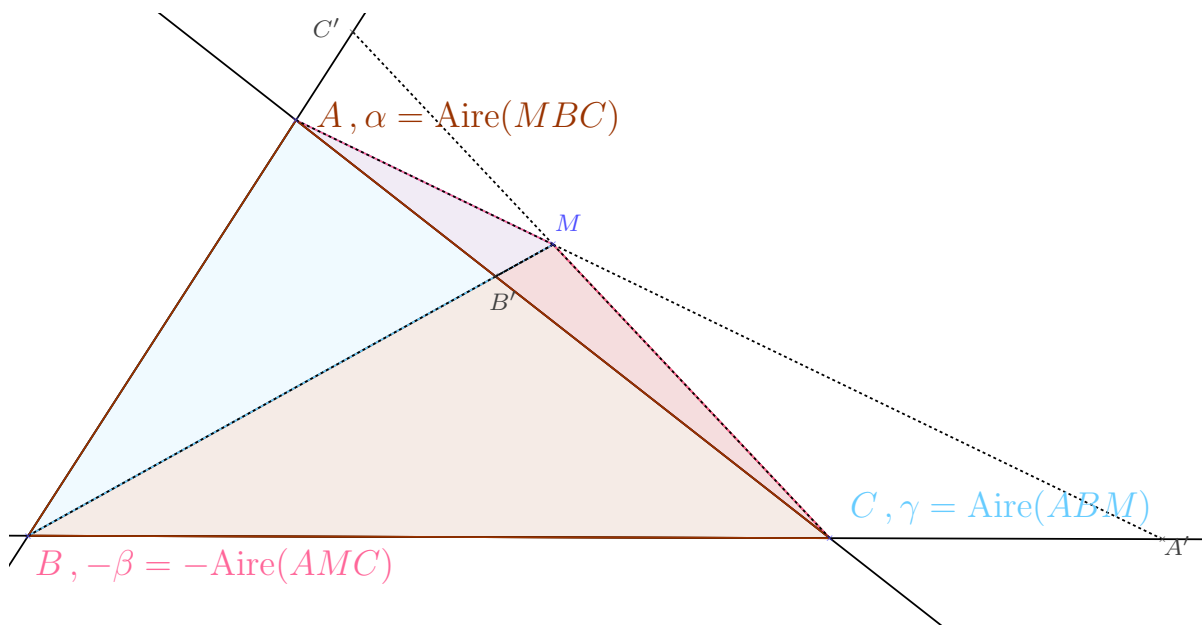


FIGURE B.3 – Coordonnées barycentriques de M à l'extérieur du triangle ABC

Puisque des coordonnées barycentriques sont définies à un coefficient de proportionnalité près, la choix de la base pour définir l'unité d'aire est sans influence sur la façon de déterminer un point par de telles coordonnées, en particulier un changement d'orientation ne fait que changer ces coordonnées en leurs opposées.

3-3 Coordonnées barycentriques et produit mixte

Dans ce paragraphe, on suppose que le plan est munie d'une structure euclidienne, par la donnée d'une base orthonormée. En observant les figures B.2, B.3 et B.4, on peut remarquer que pour obtenir la coordonnée barycentrique du point M attachée à un sommet du triangle, il suffit de calculer l'aire algébrique du triangle obtenu en substituant M à ce sommet dans le

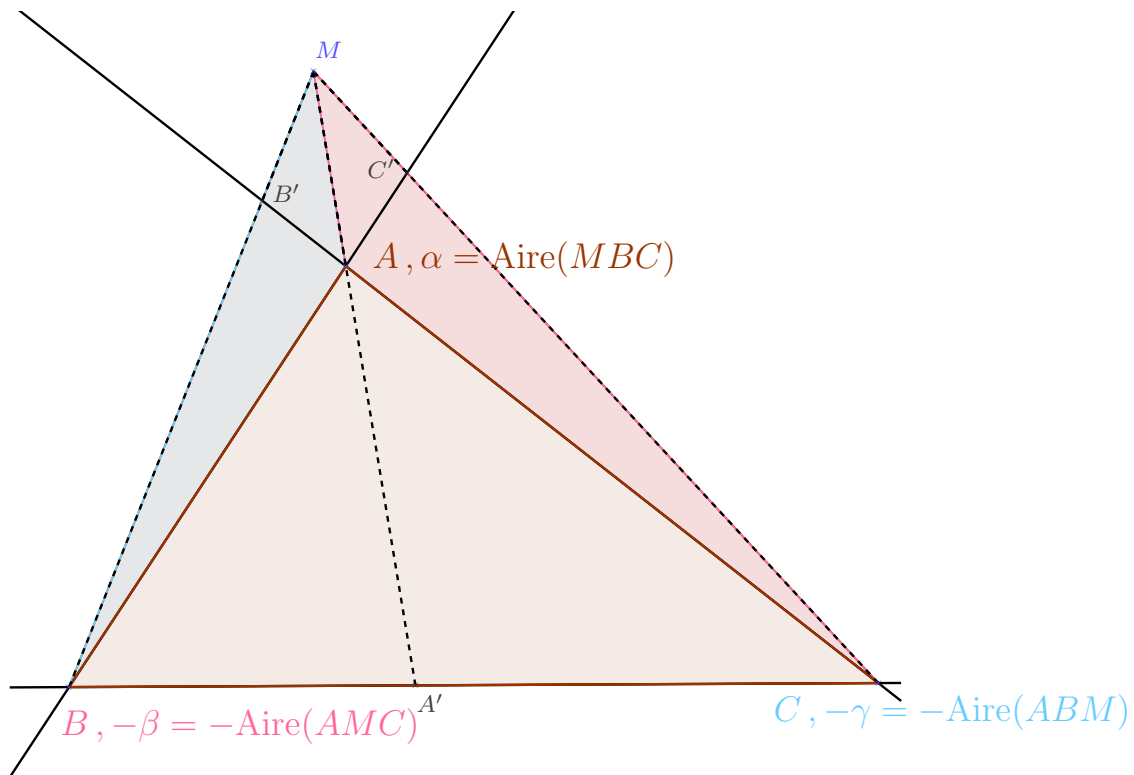


FIGURE B.4 – Coordonnées barycentriques de M à l'extérieur du triangle ABC

nom du triangle ABC . Cette coordonnée est de même signe que l'aire algébrique du triangle ABC , si et seulement si le point M et le sommet en question sont dans un même demi-plan, dont la frontière est la droite supportant le côté opposé au sommet. Lorsque le plan affine est muni d'une structure euclidienne permettant de mesurer les angles, après avoir convenu d'une orientation, il y a 3 façons d'exprimer l'aire algébrique $\Delta(XYZ)$ en tenant compte de l'orientation des angles :

$$\Delta(XYZ) = \frac{1}{2}ZX \times ZY \sin [\overrightarrow{ZX}, \overrightarrow{ZY}] = \frac{1}{2}XY \times XZ \sin [\overrightarrow{XY}, \overrightarrow{XZ}] = \frac{1}{2}YZ \times YX \sin [\overrightarrow{YZ}, \overrightarrow{YX}]$$

Ces remarques nous permettent d'attribuer les coordonnées barycentriques équivalentes suivantes pour le point M :

$$\left(\frac{\sin [\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MC}]}{MA}, \frac{\sin [\overrightarrow{MC}, \overrightarrow{MA}]}{MB}, \frac{\sin [\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}]}{MC} \right)$$

On montre que l'aire algébrique du triangle XYZ calculée par la formule $\frac{1}{2}XY \times XZ \sin [\overrightarrow{XY}, \overrightarrow{XZ}]$, est la moitié du déterminant $\det(\overrightarrow{XY}, \overrightarrow{XZ})$ dans toute base orthonormée directe. En effet, si (\vec{i}, \vec{j}) est une telle base et si θ est une mesure angulaire de la rotation qui transforme le vecteur

unitaire $\frac{\overrightarrow{XY}}{XY} = m\vec{i} + n\vec{j}$ en le vecteur unitaire $\frac{\overrightarrow{XZ}}{XZ} = m'\vec{i} + n'\vec{j}$, alors :

$$\begin{pmatrix} m' \\ n' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m \cos \theta - n \sin \theta \\ m \sin \theta + n \cos \theta \end{pmatrix}$$

On en déduit le calcul du déterminant des vecteurs unitaires $\frac{\overrightarrow{XY}}{XY}$ et $\frac{\overrightarrow{XZ}}{XZ}$:

$$\begin{vmatrix} m & m' \\ n & n' \end{vmatrix} = mn' - m'n$$

$$mn' - m'n = m^2 \sin \theta + mn \cos \theta - mn \cos \theta + n^2 \sin \theta = (m^2 + n^2) \sin \theta = \sin \theta$$

Par bilinéarité on en déduit $\det(\overrightarrow{XY}, \overrightarrow{XZ}) = XY \times XZ \times \sin \theta$. Ce réel ne dépend pas de la base orthonormée directe choisie, il est appelé produit mixte des deux vecteurs \overrightarrow{XY} et \overrightarrow{XZ} , on le note $[\overrightarrow{XY} \wedge \overrightarrow{XZ}]$, son signe dépend seulement des conventions d'orientation³. Dans le référentiel (A, B, C) , on peut donc attribuer les coordonnées barycentriques suivantes au point M :

$$\left([\overrightarrow{MB} \wedge \overrightarrow{MC}] , [\overrightarrow{MC} \wedge \overrightarrow{MA}] , [\overrightarrow{MA} \wedge \overrightarrow{MB}] \right)$$

Lorsque l'un des points A, B ou C est affecté d'une coordonnée nulle, cela revient à déterminer le barycentre de deux points en ignorant celui auquel on a attribué la masse nulle, un calcul d'aire ou de produit mixte n'est plus nécessaire. Par exemple le barycentre de (A, α) , (B, β) et $(C, 0)$ est tout simplement le barycentre de (A, α) et (B, β) où le couple (α, β) est proportionnel à $\left([\overrightarrow{MB} \wedge \overrightarrow{MC}] , [\overrightarrow{MC} \wedge \overrightarrow{MA}] \right)$. Mais nous avons $M \in (AB)$, les sinus des angles $[\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MC}]$ et $[\overrightarrow{MC}, \overrightarrow{MA}]$ sont égaux si M appartient au segment $[AB]$ ou opposés si $M \notin [AB]$. Le couple (α, β) est donc proportionnel à (MB, AM) si $M \in [AB]$ ou $(MB, -AM)$ si $M \notin [AB]$.

Si on convient d'une orientation sur la droite (AB) pour exprimer des mesures algébriques notées \overline{AM} et \overline{MB} , dont la valeur absolue est la longueur des segments $[AM]$ et $[MB]$ et dont le signe dépend du sens des vecteurs \overrightarrow{AM} et \overrightarrow{MB} , M est le barycentre de (A, \overline{MB}) et (B, \overline{AM}) .

B-4 Théorème de Céva

4-1 Condition générale de concours de 3 droites

Soient trois droites projectives complétées distinctes incluses dans un plan projectif, qui admettent les équations suivantes en coordonnées barycentriques dans un référentiel (A, B, C)

$$\begin{aligned} d_1 : & ax + by + cz = 0 \\ d_2 : & a'x + b'y + c'z = 0 \\ d_3 : & a''x + b''y + c''z = 0 \end{aligned}$$

3. J'ai préféré la notation $[\vec{u} \wedge \vec{v}]$ à la notation $[\vec{u}, \vec{v}]$ qui prête confusion avec l'angle des vecteurs \vec{u} et \vec{v} , elle a pour avantage de rappeler que la valeur absolue de ce produit mixte est aussi la norme du produit vectoriel $\vec{u} \wedge \vec{v}$, qui est un vecteur qui dépend lui aussi de conventions d'orientation.

Ces équations sont en fait des équations cartésiennes de trois plans $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2$ et \mathcal{P}_3 de l'espace à 3 dimensions dans lequel est plongé notre plan projectif, ces plans ont en commun l'origine O du repère cartésien $(O, \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC})$ dans lequel sont exprimées ces équations. Si O est le seul point commun aux trois plans, les droites projectives complétées n'ont aucun point en commun qui se traduirait par une droite de l'espace à 3 dimensions.

Pour que les trois droites projectives complétées aient au moins un point commun il faut donc que le déterminant du système de trois équations ci-dessus soit nul, et puisque l'on a supposé les trois droites distinctes, cela signifie que les trois plans $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2$ et \mathcal{P}_3 sont distincts et que leur intersection est une droite $d = \mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2 \cap \mathcal{P}_3$, cette droite d représente donc un point de concours des trois droites projectives complétées. Si ce point de concours est à l'infini, cela signifie que les droites sont parallèles, si ce point est à distance finie, les 3 droites sont concourantes en ce point. On arrive à la conclusion que les trois droites admettant les équations

ci-dessus sont concourantes ou parallèles entre elles, si et seulement si
$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix} = 0$$

On peut en déduire une condition pour que deux droites soient parallèles, les deux droites distinctes d_1 et d_2 par exemple sont parallèles si et seulement si le seul point commun de $\overline{d_1}$ et $\overline{d_2}$ est à l'infini, ces droites projectives complétées doivent donc être concourantes avec la droite de l'infini d'équation $x + y + z = 0$, autrement dit d_1 et d_2 sont parallèles si et seulement

$$\text{si } \begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

4-2 Condition de concours de 3 céviennes dans un triangle

On appelle droite cévienne ou simplement cévienne d'un triangle ABC , toute droite passant par un sommet du triangle sécante avec la droite portant le côté opposé.

THÉORÈME 29 (THÉORÈME DE CÉVA) *Trois droites céviennes d'un triangle ABC qui coupent les droites (AB) , (BC) et (CA) respectivement en C' , A' et B' sont concourantes ou parallèles entre elles si et seulement si :*

$$\overline{AB'} \times \overline{BC'} \times \overline{CA'} = \overline{A'B} \times \overline{B'C} \times \overline{C'A}$$

A' est le barycentre de $(B, \overline{CA'})$ et $(C, \overline{A'B})$, une équation en coordonnées barycentriques de la droite (AA') dans le référentiel (A, B, C) peut donc s'écrire ainsi :

$$\begin{vmatrix} 0 & \overline{CA'} & \overline{A'B} \\ 1 & 0 & 0 \\ x & y & z \end{vmatrix} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \overline{A'B}y - \overline{CA'}z = 0$$

On obtient de même des équations des droites (BB') et (CC') :

$$\begin{vmatrix} \overline{B'C} & 0 & \overline{AB'} \\ 0 & 1 & 0 \\ x & y & z \end{vmatrix} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \overline{AB'}x - \overline{B'C}z = 0$$

$$\begin{vmatrix} \overline{BC'} & \overline{C'A} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ x & y & z \end{vmatrix} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \overline{C'A}x - \overline{BC'}y = 0$$

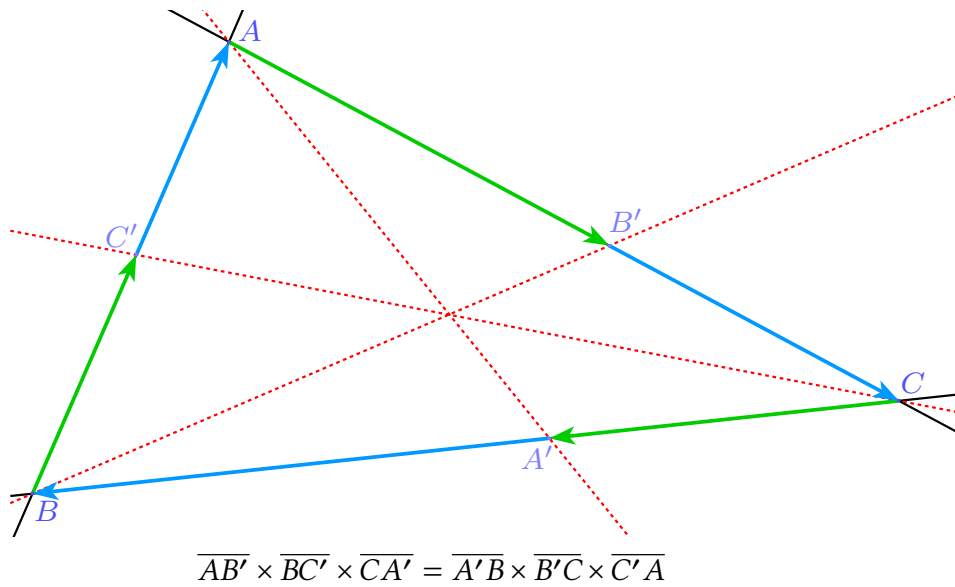


FIGURE B.5 – Théorème de Ceva

On en déduit la condition de concours ou de parallélisme des droites (AA') , (BB') et (CC') suivante :

$$\begin{vmatrix} 0 & \overline{A'B} & -\overline{CA'} \\ \overline{AB'} & 0 & -\overline{B'C} \\ \overline{C'A} & -\overline{BC'} & 0 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \overline{AB'} \times \overline{BC'} \times \overline{CA'} - \overline{A'B} \times \overline{B'C} \times \overline{C'A} = 0$$

Pour qu'elles soient parallèles entre elles, il faut qu'elles soient concurrentes avec la droite de l'infini, il faut donc de plus que :

$$\begin{vmatrix} 0 & \overline{A'B} & -\overline{CA'} \\ \overline{AB'} & 0 & -\overline{B'C} \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \overline{AB'} \times \overline{A'C} - \overline{A'B} \times \overline{B'C} - \overline{A'B} \times \overline{AB'} = 0$$

Ceci est équivalent à la condition de parallélisme du théorème de Thalès :

$$\overline{AB'} \times \overline{A'C} = \overline{A'B} (\overline{AB'} + \overline{B'C}) \Leftrightarrow \frac{\overline{A'C}}{\overline{A'B}} = \frac{\overline{AB'} + \overline{B'C}}{\overline{AB'}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB'}}$$

Pour qu'elles soient concurrentes en un point à distance finie, il suffit de vérifier que :

$$\frac{\overline{A'C}}{\overline{A'B}} \neq \frac{\overline{AC}}{\overline{AB'}}$$

Bibliographie

- [1] Yvonne et René SORTAIS. *La géométrie du triangle*. Hermann, 1997. Point de vue exclusivement euclidien, les coniques interviennent comme conséquence de l'étude de l'isogonalité dans un triangle.
- [2] Pierre BROUSSE. *Mécanique*. Armand Colin, 1968. Pour la résolution des équations différentielles de manière détaillée et relativement élémentaire.
- [3] Jean-Denis EIDEN. *Géométrie analytique classique*. Calvage & Mounet, 2009. Les coniques y sont étudiées principalement du point de vue géométrique affine.
- [4] Jacqueline LELONG-FERRAND et Jean-Marie ARNAUDIÈS. *Géométrie et cinématique*. Dunod Université, 1977. Un grand classique contenant les notions d'algèbre linéaire utilisées ici.
- [5] Pierre SAMUEL. *Géométrie projective*. PUF, 1986. Cours introductif et quasi complet de géométrie projective, nécessitant des bases solides en algèbre linéaire classique, quasi exhaustif sur les propriétés projectives des coniques.
- [6] Claude TISSERON. *Géométries affine, projective et euclidienne*. Hermann, 1988. Les coniques y sont étudiées des trois points de vue géométriques : euclidien, affine et projectif ; plus détaillé que [3] concernant le point de vue projectif.
- [7] Luc VALENTIN. *L'univers mécanique*. Hermann, 1983. Pour la résolution des équations différentielles, plus quelques notions de physique mettant en évidence que le modèle mathématique proposé par Newton, oblige à des hypothèses physiques impossibles à passer sous silence en physique moderne, mais nécessaire en mécanique classique pour aboutir aux trajectoires selon une conique.